

RAPORTARE ȘTIINȚIFICĂ - Etapa 2

proiect TE27/2020 - RePlan (PN-III-P1-1.1-TE-2019-1614)
Reliable motion planning for nonlinear systems under uncertainties

30 noiembrie 2021

Cuprins

1	Rezumatul etapei	1
2	Descrierea științifică și tehnică	2
3	Rezultatele etapei.	2
3.1	Parametrizări plate echivalente pentru modele neliniare de tip dronă	2
3.2	Reprezentări compacte pentru funcții afine pe porțiuni	7
3.3	Sinteza unor legi de reglare complexe	11
3.3.1	Strategii de reglare în sens \mathcal{H}_2	11
3.3.2	Analiza complexității pentru formularea MPC explicită	13
4	Diseminarea rezultatelor.	14

1 Rezumatul etapei

Obiectivul acestei etape a constat în “*Îmbunătățiri ale parametrilor de robustețe și performanță în cazul variațiilor de model (WP2)*”.

Obiectivul etapei a fost îndeplinit prin cele 3 activități asociate și prin diseminarea rezultatelor în articole de cercetare. În particular am studiat și implementat:

Activitatea 2.1 Implementare a unor formulări robuste, capabile să trateze variații de model nestructurate;

Activitatea 2.2 Implementare a unor formulări adaptive, capabile să trateze variații de model structurate;

Activitatea 2.3 Analiză a variațiilor de timp de-a lungul traiectoriei obținute prin parametrizări plate.

Activitățile propuse în cadrul acestei etape au fost realizate integral iar rezultatele s-au concretizat prin livrabilele:

D3 Raport tehnic ce prezintă rezultatele pentru cazul cu incertitudini cu perturbații bornate, cu implementări robuste și adaptive;

D4 Raport tehnic pentru strategii și arhitecturi de reglare pentru sisteme cu un singur și cu mai mulți agenți;

D8 Pregătire un articol de jurnal de top și 2 articole de conferință.

2 Descrierea științifică și tehnică

Rezultatele științifice asociate acestei etape acoperă mai multe domenii de interes, pornind de la modelări pentru diverse sisteme neliniare, parametrizări plate echivalente și strategii de reglare pentru urmărirea cu garanții de stabilitate / robustețe a unor traiectorii de referință generate cu funcții spline.

3 Rezultatele etapei

3.1 Parametrizări plate echivalente pentru modele neliniare de tip dronă

Studiul a mai multor parametrizări plate pentru acel sistem dinamic neliniar permite să realizăm atât obiectivele **Activității 2.1** cât și pe cele ale **Activității 2.2**.

Introducem mai întâi pe scurt modelul UAV 2D utilizat în continuare și amintim formularea standard a problemei generării traiectoriei și proiectării legii de reglare:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V_a \cos \psi + W_x, \\ \dot{y} &= V_a \sin \psi + W_y, \\ \dot{\psi} &= \frac{g \tan \phi}{V_a},\end{aligned}\tag{1}$$

unde (x, y) și ψ sunt poziția și unghiul de girație. W_x și W_y sunt componentele de viteză ale perturbației (vânt). Reglarea dinamicii este asigurată prin controlul vitezei față de aer V_a și a unghiului de tangaaj ϕ . Scriind compact $\dot{\xi} = f(\xi, u)$, unde $\xi = [x \ y \ \psi]^\top \in \mathbb{R}^3$, $u = [V_a \ \phi]^\top \in \mathbb{R}^2$ și $f(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ denotă dinamica (1), observăm că avem un sistem plat dacă și numai dacă există o ieșire plată $z = \Phi(\xi, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots) \in \mathbb{R}^2$, ce permite să exprimăm algebric restul stărilor și intrărilor în funcție de z și un număr finit de derivate ale acestuia [8].

În continuare, similar cu [2], parametrizăm ieșirea plată ca o combinație de funcții spline $\mathbf{B}_d(t) = [B_{0,d}(t), \dots, B_{n,d}(t)]^\top$ prin intermediul punctelor de control $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2 \times n} = [P_0, \dots, P_n]$ așa încât:

$$z(t) = \mathbf{P}\mathbf{B}_d(t), \quad \forall t \in [t_0, t_N].\tag{2}$$

Putem acum reduce problema de reglare la investigația unui sistem companion [10], reprezentat ca:

$$\dot{\xi} = f(\xi, u)\tag{3}$$

unde se aplică următoarea transformare a intrării:

$$\begin{cases} z &= z(\xi, \dot{\xi}, \dots), \\ u &= u(v, \xi, \dot{\xi}, \dots), \end{cases}\tag{4}$$

astfel încât sistemul neliniar să fie convertit într-o formă liniară echivalentă invariantă în timp:

$$\begin{cases} z^{(n)} &= v, \\ v &= z_{ref}^{(n)} + K_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + K_0e, \end{cases}\tag{5}$$

unde v este controlul virtual indus de reprezentarea plată, $e = z_{ref} - z$ este diferența dintre referința z_{ref} și z , iar coeficienții K_i cu $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ vor fi aleși astfel încât polii ecuației caracteristice să asigure stabilitatea modelului în buclă închisă. Prin urmare, ecuația (5) devine:

$$e^{(n)} + K_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + K_0e = 0.\tag{6}$$

Majoritatea rezultatelor din literatură trec rapid peste alegerea unei ieșiri plate și merg direct la sinteza regulatorului. Aici, intenționăm să investigăm mai multe reprezentări plate și să observăm modul în care acestea afectează (în bine sau în rău) procedurile de generare a traiectoriei și proiectare a regulatorului.

Tabela 1: Reprezentări plate corespunzătoare diferitelor ieșiri plate.

Stări și intrări	rep. 1 $\Phi_1(\cdot)$	rep. 2 $\Phi_2(\cdot)$	rep. 3 $\Phi_3(\cdot)$	rep. 4 $\Phi_4(\cdot)$
x	z_1	$z_1 \cos z_2$	z_1	$z_2 - \dot{z}_1$
y	z_2	$z_1 \sin z_2$	$z_2 - \dot{z}_1$	$z_1 + \ddot{z}_1 - \dot{z}_2$
$\tan \psi$	$\frac{\dot{z}_2}{\dot{z}_1}$	$\frac{\dot{z}_1 \sin z_2 + \dot{z}_2 z_1 \cos z_2}{\dot{z}_1 \cos z_2 - \dot{z}_2 z_1 \sin z_2}$	$\frac{\dot{z}_2 - \dot{z}_1}{\dot{z}_1}$	$\frac{\ddot{z}_1 + \dot{z}_1 - \dot{z}_2}{\dot{z}_2 - \dot{z}_1}$
V_a	$\sqrt{\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2}$	$\sqrt{\dot{z}_1^2 + z_1^2 \dot{z}_2^2}$	$\sqrt{\dot{z}_1^2 + (\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2}$	$\sqrt{(\ddot{z}_1 + \dot{z}_1 - \dot{z}_2)^2 + (\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2}$
$\tan \phi$	$\frac{1}{g} \frac{\ddot{z}_2 \dot{z}_1 - \dot{z}_1 \ddot{z}_2}{\sqrt{\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2}}$	$f_1(z, \dot{z}, \ddot{z}) + f_2(z, \dot{z})$	$\frac{(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)\ddot{z}_1 - (\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1)\dot{z}_1}{g \sqrt{\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2}}$	$g_1(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}, z^{(4)}) + g_2(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}})$

Stările și intrările rămase sunt exprimate ca în ecuația (7) care este detaliată în tabela 1:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ u \end{bmatrix} = \Phi_1(z, \dot{z}, \ddot{z}). \quad (7)$$

Același proces este aplicat pentru a doua reprezentare plată. În această selecție, coordonate cilindrice sunt folosite pentru a descrie sistemul:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan \frac{y}{x} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Stările și intrările sunt exprimate ca în ecuația (9), detaliată în a treia coloană a tabelului 1:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ u \end{bmatrix} = \Phi_2(z, \dot{z}, \ddot{z}). \quad (9)$$

unde

$$f_1(z, \dot{z}, \ddot{z}) = \frac{\ddot{z}_2 \dot{z}_1 z_1 - \ddot{z}_1 \dot{z}_2 z_1}{g \sqrt{\dot{z}_1^2 + z_1^2 \dot{z}_2^2}}, \quad f_2(z, \dot{z}) = \frac{2\dot{z}_1^2 \dot{z}_2 + \dot{z}_2^3 z_1^2}{g \sqrt{\dot{z}_1^2 + z_1^2 \dot{z}_2^2}}.$$

Stările și intrările rămase sunt exprimate ca în ecuația (10), detaliată în a 4a coloană a tabelului 1:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ u \end{bmatrix} = \Phi_3(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}). \quad (10)$$

Următoarea reprezentare plată este o combinație între poziția, viteza și accelerația sistemului:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} + y \\ x + \dot{y} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Stările și intrările rămase sunt exprimate ca în ec. (12), detaliată în ultima coloană a tabelului 1:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ u \end{bmatrix} = \Phi_4(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}, z^{(4)}). \quad (12)$$

unde

$$g_1(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}, z^{(4)}) = \frac{(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)(z_1^{(4)} + \ddot{z}_1 - \ddot{\ddot{z}}_2)}{g \sqrt{(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2 + (\ddot{\ddot{z}}_1 + \dot{z}_1 - \ddot{z}_2)^2}}, \quad g_2(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}) = \frac{(\ddot{z}_2 - \ddot{\ddot{z}}_1)(\ddot{\ddot{z}}_1 + \dot{z}_1 - \ddot{z}_2)}{g \sqrt{(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2 + (\ddot{\ddot{z}}_1 + \dot{z}_1 - \ddot{z}_2)^2}}.$$

Aceste ieșiri plate sunt inspirate din diverse surse: ieșirea plată 1 în (??) este cea mai folosită în literatură, în timp ce a doua ieșire plată în (8) exploatează o schimbare a coordonatele și ultimele două ieșiri plate sunt derivate din faptul că, dacă $[z_1 \ z_2]^T$ este o ieșire plată, atunci $[z_1 \ z_2 + \dot{z}_1]^T$ este, de asemenea, o ieșire plată. Toate reprezentările plate de mai sus se găsesc cunoscând descrierea completă a sistemului (intrări, ieșiri, actuatori și altele asemenea).

Considerăm în continuare o colecție de puncte intermediare (și momente de timp asociate):

$$\mathbb{W} = \{w_1, w_2, \dots, w_N\}, \quad \mathbb{T}_W = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}, \quad (13)$$

și rezolvăm o problemă de optimizare de constrângeri ce garantează trecerea prin acesteale momente specificate de timp:

$$\begin{bmatrix} x(t_k) \\ y(t_k) \end{bmatrix} = w_k \in \mathbb{W}. \quad (14)$$

Ca și cost, considerăm:

$$\mathbf{P} = \arg \min_{\mathbf{P}} \int_{t_0}^{t_N} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) dt \quad (15)$$

În continuare, detaliem pentru reprezentarea 4 a ieșirii plate costul (15):

$$\tilde{\Xi}_4(\mathbf{B}_d(t), \mathbf{P}) = (\ddot{z}_1 + \dot{z}_1 - \ddot{z}_2)^2 + (\dot{z}_2 - \ddot{z}_1)^2. \quad (16)$$

Similar, constrângerile (14) devin:

$$\begin{bmatrix} x(t_k) \\ y(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2(t_k) - \dot{z}_1(t_k) \\ z_1(t_k) + \ddot{z}_1(t_k) - \dot{z}_2(t_k) \end{bmatrix} = w_k. \quad (17)$$

Alegând intrările sistemului ca:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \tan \phi \end{bmatrix} = u(z, \dot{z}, \ddot{z}), \quad (18)$$

intrarea virtuală nominală devine $v = \ddot{z}$. Pentru a lua în calcul erorile de urmărirea, implementăm un mecanism de feedback:

$$v = \ddot{z}_{ref} + K_1 \dot{e}_z + K_2 \int e_z dt + K_3 e_z. \quad (19)$$

Pentru ilustrare, folosim lista de 6 puncte intermediare și marcajele temporale asociate, luate echidistant între t_0 și $t_N = 45s$, pentru problema generării traiectoriei:

$$\mathbb{W} = 10^2 \times \left\{ \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1.3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1 \\ 1.2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.6 \\ -0.9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.2 \\ -1.2 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathbb{T}_W = \{0, 9, 18, 27, 36, 45\}. \quad (20)$$

Fig. 1 prezintă profilurile stării, intrării precum și a traiectoriei, generate cu cele 4 reprezentări plate propuse în (7), (9), (10) și respectiv (12).

Tabela 2: Parametri și rezultate

	rep. 1	rep. 2	rep. 3	rep. 4
număr puncte de control	6	6	6	6
ordin B-spline	3	3	4	5
valoare cost ($\times 10^4 m^2/s$)	1.1332	1.3540	1.1772	1.2580
lungime curbă (m)	670.75	709.09	675.46	689.46

Parametrii și performanțele fiecărei implementări sunt date în tabela 2.

În plus, în această simulare, oferim 4 scenarii diferite ale vectorului de perturbare a vântului (W) pentru a experimenta dependența erorii de urmărirea de direcția vântului. Detaliile sunt furnizate în tabelul 3 unde $RMS(e_{ij})$ este valoarea pătratică medie a erorii de urmărirea pe axa i ($i \in \{x, y\}$) implementat cu legea de control j ($j \in \{1, 2\}$).

Pentru ilustrare, în Fig. 2 arătăm variația costului și lungimea traiectoriei rezultate (cele două sunt în strânsă legătură deoarece costul minimizează energia traiectoriei) și erorile de urmărirea în poziție și unghi de girație prin două implementări ale legii de reglare în buclă închisă.

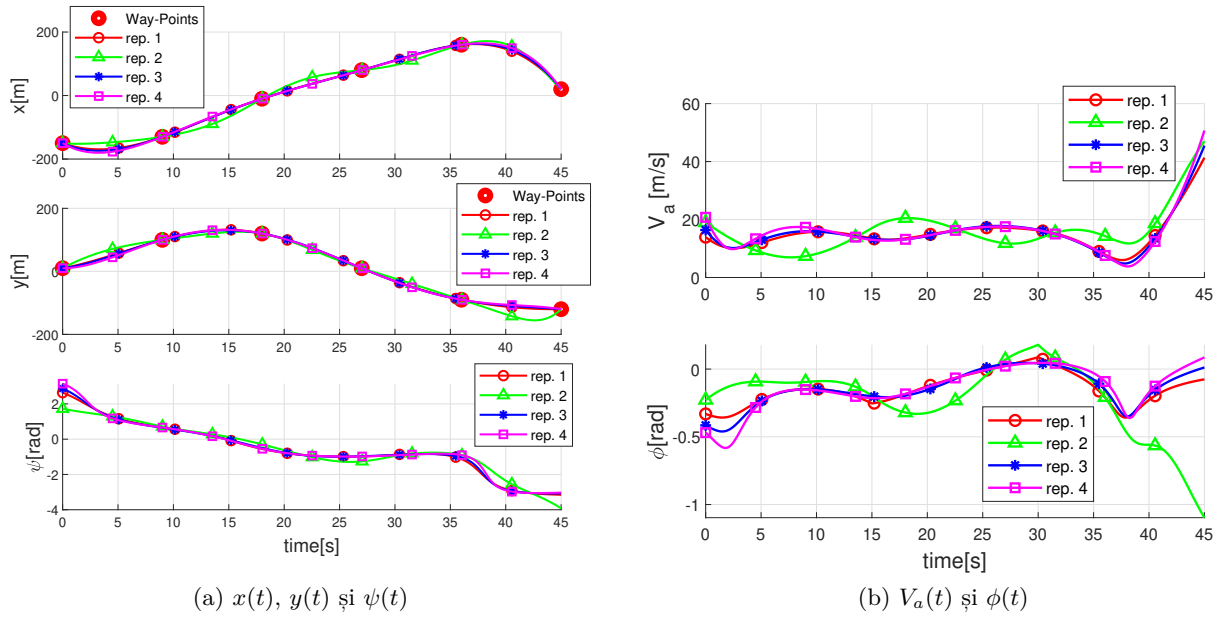


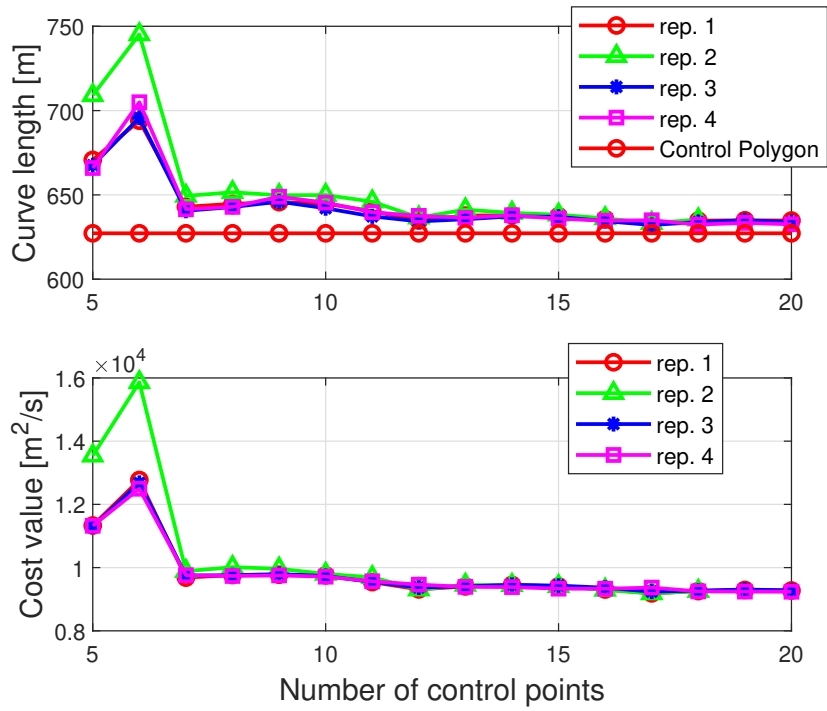
Figura 1: Analiză comparativă pentru reprezentări prin cele 4 ieșiri plate

Tabela 3: Eroare de urmărire cu diferite scenarii de vânt

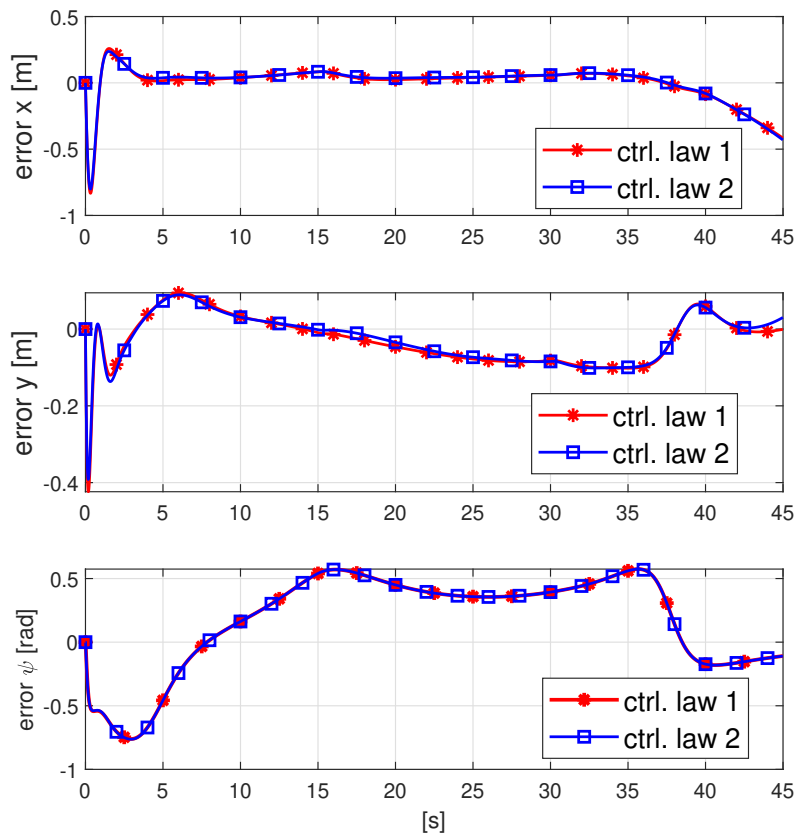
$\text{RMS}(\cdot)[\text{m}]$ $W[\text{m/s}]$	e_{x1}	e_{x2}	e_{y1}	e_{y2}
[+5;+5]	0.0869	0.1317	0.0588	0.0744
[-5;+5]	0.0675	0.1301	0.1079	0.1146
[+5;-5]	2×10^{21}	1×10^{20}	8×10^{20}	3×10^{20}
[-5;-5]	5×10^{18}	0.3008	3×10^{18}	0.1947

Parametrii K_1 , K_2 și K_3 sunt aleși din ecuația caracteristică cu poli p_1 , p_2 și p_3 astfel încât:

$$(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) = s^3 - K_3s^2 + K_1s + K_2. \quad (21)$$



(a) lungimea curbelor și valorile funcției obiectiv



(b) eroare de urmărire pentru $x(t)$ și $y(t)$

Figura 2: Variații în procedura de generare a traiectoriei pentru cele 4 reprezentări plate

3.2 Reprezentări compacte pentru funcții afine pe porțiuni

Acest rezultat propune reprezentări eficiente pentru o largă clasă de suprafețe afine pe porțiuni. În cazul explicitat în continuare, reprezentarea este utilizată pentru a caracteriza eficient un spațiu cu obstacole poliedrale (cu aplicație directă în implementările **Activităților 2.1** și **2.2**). Noțiunea poate fi extinsă pentru o suprafață afină pe porțiuni generică.

În particular, am elaborat o suită de algoritmi de planificare a mișcării pentru diverse rețele de agenți, având ca scop evitarea coliziunii dintre agenți și obstacole prezente în mediu, precum și urmărirea unei ținte fixe. Analizăm abordarea generală privind implementarea așa-numitului *câmp potențial*. După cum este recunoscut și în literatura de specialitate (vezi [1]), *câmpul potențial* reprezintă un ansamblu format din două forțe distincte ce pot acționa concomitent asupra unui agent la un moment de timp specific, și anume, o *forță de repulsie* (responsabilă de evitarea coliziunilor dintre agenți și eventuale obstacole existente în mediu) și o *forță de atracție* (care atrage agentul către o țintă fixă, stabilită a priori). Un *aranjament de hiperplane* este descris [6] pornind de la noțiunea de hiperplan:

$$H_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_k^\top x = b_k\}, \quad (22)$$

unde $a_k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ și $b_k \in \mathbb{R}$. Un astfel de hiperplan împarte mediul în *două spații disjuncte*:

$$H_k^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_k^\top x \leq b_k\}, \quad H_k^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -a_k^\top x \leq -b_k\}. \quad (23)$$

H_k^+ evidențiază în mod convențional regiunea situată în partea dreaptă a hiperplanului respectiv, iar H_k^- face referire la partea stângă a aceluși hiperplan. Astfel, se obține partiționarea spațiului în celule disjuncte, atât fezabile (notate Σ°) cât și interzise (i.e. obstacolele - notate Σ^\bullet), celule ce vor fi în continuare definite generic prin $A(\sigma)$ (cu $A(\mathbb{H}_k) := \bigcup_{\sigma \in \Sigma} A(\sigma)$), unde σ reprezintă un tuplu ce conține o combinație de semne specifică pentru fiecare celulă în parte, prin care este descrisă poziția acesteia prin raportare la fiecare hiperplan H_k existent în mediu (v. fig. 3).

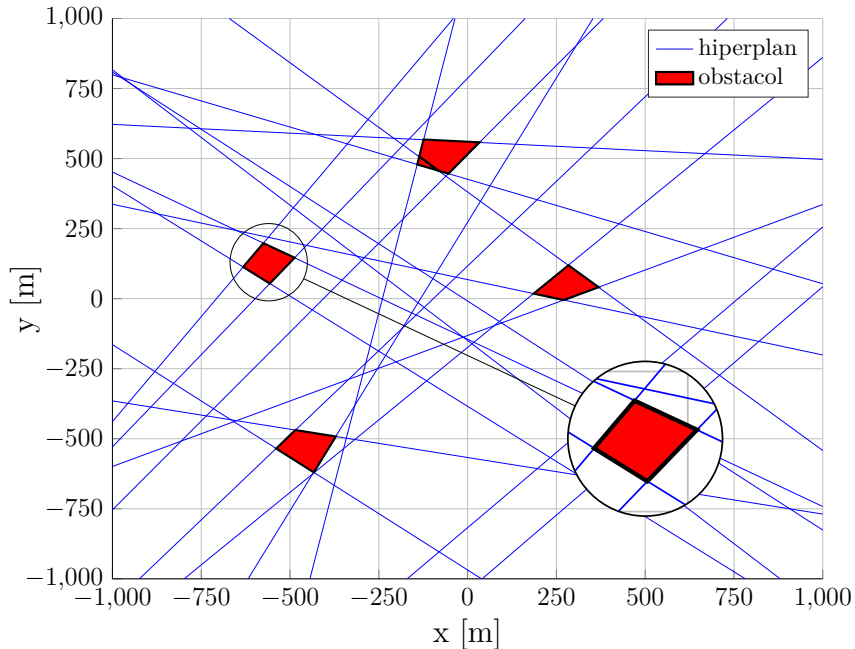


Figura 3: Aranjament de hiperplane ce descrie obstacole fixe

Revenind la implementarea *câmpului potențial*, *forța de repulsie* a fost construită prin utilizarea unei *funcții fracționare* care primește ca argument o așa-numită *funcție sumă*. După cum este descris și în [5], această *funcție fracționară* descrie efectul câmpului potențial repulsiv asupra agentului, în funcție de poziția sa față de obstacolele prezente în mediu. Mai precis, aceasta are valoarea maximă în interiorul regiunii infeasibile (ce descrie un obstacol), respectiv o valoare ce tinde asimptotic către

0 pe măsură ce agentul se depărtează de obstacole:

$$P(\gamma(x)) = \frac{\phi_1}{(\phi_2 + \gamma(x))^2}, \quad (24)$$

unde $\gamma(x)$ descrie funcția sumă liniară pe porțiuni introdusă în [5]:

$$\gamma(x) = \sum_{k=1}^{n_h} (a_k x - b_k + |a_k x - b_k|). \quad (25)$$

Analizând (25), se observă că în situația în care agentul se regăsește într-o regiune interzisă ce descrie un obstacol (adică $\pm a_k x \leq \pm b_k$), atunci $\gamma(x) = 0$; altfel, $\gamma(x) = 2 \sum_{k: a_k^\top x > b_k} (a_k^\top x - b_k)$.

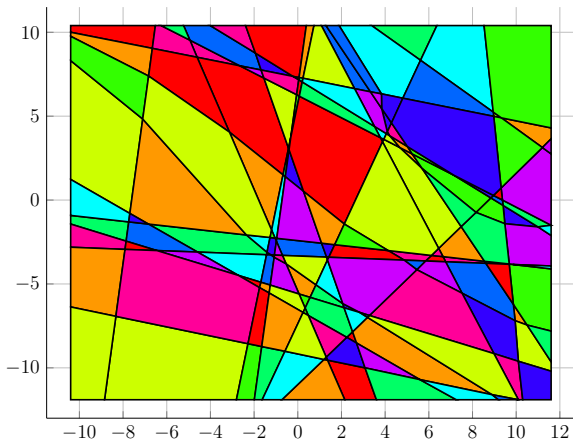
Ținând cont totodată și de notația $A(\sigma)$, cu $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ și $\sigma_k = \pm$, putem generaliza (25), astfel încât să acoperim întreg suportul poliedral generat de totalitatea hiperplanelor H_k existente, nu doar de cele care descriu un singur obstacol:

$$\gamma^\bullet(x) = 2 \sum_{k: (2\sigma_k^\bullet - 1)a_k^\top x \geq (2\sigma_k^\bullet - 1)b_k} (2\sigma_k^\bullet - 1) \cdot (a_k^\top x - b_k), \quad (26)$$

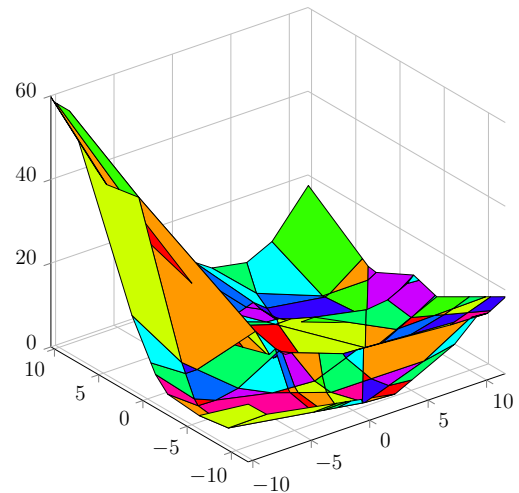
unde $\sigma_k^\bullet = \{0, 1\}$, astfel încât să menținem echivalența ' \pm ' = ± 1 . Pentru a extinde (26) pentru cazul multi-obstacol, am recurs la utilizarea operatorului 'min' pentru a defini funcția sumă globală:

$$\gamma(x) = \min_{\sigma^\bullet, i \in \Sigma^\bullet} \gamma^{\bullet, i}(x) = \min_{\sigma^\bullet, i \in \Sigma^\bullet} 2 \sum_{k: \sigma_k^{\bullet, i} \neq \sigma_k^j} (2\sigma_k^{\bullet, i} - 1) \cdot (a_k^\top x - b_k), \quad \forall x \in \mathcal{A}(\sigma^j). \quad (27)$$

Aceasta va fi ulterior utilizată ca argument în interiorul funcției fracționare, fiind astfel obținută componenta repulsivă $P(\gamma(x))$, definită în (24).



(a) exemplu de partiționare poliedrală



(b) funcția sumă globală atașată spațiului poliedral

Câmpul potențial repulsiv astfel obținut este integrat într-o problemă de optimizare de forma MPC (reglare predictivă cu constrângeri). În acest caz, am considerat inițial un sistem liniar și invariant în timp, de forma:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad y_k = Cx_k, \quad (28)$$

unde $x \in \mathbb{R}^n$ este vectorul de stare, $u \in \mathbb{R}^m$ reprezintă comanda aplicată sistemului, $y \in \mathbb{R}^p$ semnalul de ieșire, iar $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, matricile de stare asociate.

Plecând de la un model de control predictiv clasic (ce presupune existența unui cost quadratic, respectiv a unor constrângeri liniare), am adaptat pentru sistemul evidențiat în (28), ajungând în

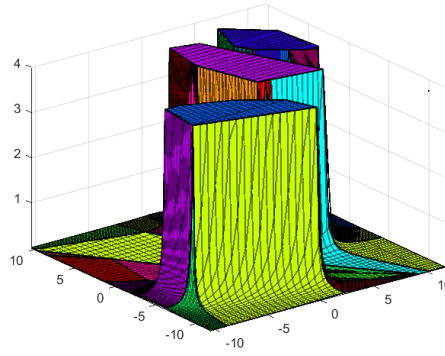


Figura 4: Câmp potențial repulsiv indus de funcția sumă globală definită în (24)

final la definirea următoarei probleme de optimizare:

$$\mathbf{u}_N^* = \underset{\mathbf{u}_N}{\operatorname{argmin}} \|x_N\|_S^2 + \sum_{k=0}^{N-1} (\|x_k\|_Q^2 + \|\Delta u_k\|_R^2) + P(\gamma(y_k)), \quad (29a)$$

$$\text{s.t. } x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (29b)$$

$$y_k = Cx_k, \quad (29c)$$

$$x_k \in \mathcal{X}, u_k \in \mathcal{U}, y_k \in \mathcal{Y}, \quad (29d)$$

pentru $k \in \{0, \dots, N-1\}$.

Datorită termenului neliniar $P(\gamma(x))$, pentru a rezolva (33) este necesară reprezentarea într-o manieră care să poată fi recunoscută de către un solver. Din acest motiv, am considerat că utilizarea reprezentărilor folosind *programarea cu variabile mixte (MIP)* servește cel mai bine scopul dorit.

Astfel, au rezultat 4 metode principale de utilizare, fiecare metodă generând o reprezentare unică, ce va fi detaliată în cele ce urmează. Dintre aceste metode, amintim:

- M1) extragerea reprezentărilor PWA bazate pe vârfuri pentru fiecare funcție sumă individuală $\gamma^{\bullet,i}(y_k)$, urmată de implementarea selecției folosind operatorul 'min', și aplicarea funcției potențiale $P(\gamma(y_k))$;
- M2) extragerea reprezentărilor PWA bazate pe vârfuri pentru fiecare funcție sumă individuală $\gamma^{\bullet,i}(y_k)$, urmată de aplicarea funcției potențiale pentru fiecare dintre aceste funcții, și implementarea selecției folosind operatorul 'max';
- M3) extragerea reprezentărilor PWA bazate pe vârfuri pentru funcția sumă globală și aplicarea MIP prin raportare la vârfurile v_j extrase, precum și la funcțiile $\gamma(v_j)$;
- M4) utilizarea reprezentărilor PWA bazate pe aranjamentul de hiperplane pentru funcția sumă globală.

Astfel, vom detalia în continuare tipurile de reprezentări *MI*, pentru fiecare din scenariile de lucru enunțate în paragraful anterior, și vom începe prin definirea operatorilor 'min' și 'max'.

Conform ([4]), reprezentările *mixed-integer* pentru $\underline{\gamma} = \min\{\gamma(x_1), \dots, \gamma(x_n)\}$ și $\bar{\gamma} = \max\{\gamma_1(x_1), \dots, \gamma_n(x_n)\}$ sunt exprimate prin:

$$\gamma_i(x_i) - M(1 - z_i) \leq \underline{\gamma} \leq \gamma_i(x_i), \quad (30a)$$

$$\gamma_i(x_i) \leq \bar{\gamma} \leq \gamma_i(x_i) + M(1 - z_i), \quad (30b)$$

$$z_1 + \dots + z_n = 1, \quad (30c)$$

pentru $z_i \in \{0, 1\}$ și $\forall i = 1 \dots n$.

Aici este vizibilă o abordare de tip "big-M". Datorită condiției impuse prin (30c), doar o singură variabilă binară z_i are valoarea '1', moment la care inegalitatea (30a) devine $\gamma_i(x_i) \leq \underline{\gamma} \leq \gamma_i(x_i)$;

implicit, pentru restul variabilelor binare, aceeași inegalitate va deveni $\underline{\gamma} \leq \gamma_i(x_i)$. O abordare similară se regăsește și în cazul operatorului 'max', fiind utilizate relațiile (30b) și (30c).

Mai departe vom analiza metoda de obținere a reprezentării MI bazată pe vârfuri (vezi [4]). În primul rând, considerăm o funcție PWA cu suport de-a lungul întregului aranjament poliedral, $f(x) : \mathbb{R}^n \mapsto R$, unde vârfurile tuturor regiunilor R_i sunt stocate în $\mathbb{V} = \{v_j\}_{j=1\dots m}$. Definind această funcție PWA, putem apoi exprima așa-numitul epigraf al funcției $f(x)$, unde $f(x) \leq t$, impunând simultan următoarele condiții de descriere a regiunilor active, bazată pe vârfuri:

$$x = \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j, \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j f(v_j) \leq t, \quad (31a)$$

$$\alpha_j \geq 0, \quad \forall j = 1 \dots m, \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j = 1, \quad (31b)$$

$$\alpha_j \leq \sum_{i: v_j \in R_i} z_i, \quad \sum_{j=1}^n z_j = 1, \quad (31c)$$

pentru $z \in \{0, 1\}^n$.

Nu în ultimul rând, vom descrie și suportul matematic al reprezentării utilizate în scenariul M4), și anume reprezentarea PWA bazată pe aranjamentul de hiperplane. Această metodă implică de asemenea utilizarea epigrafului funcției $f(x)$, folosit ca și constrângere asupra valorii potențialului introdus în costul problemei de optimizare.

Diferența majoră comparativ cu abordările anterioare este reprezentată de rescrierea relațiilor (30a) și (30b) astfel încât suportul de hiperplane asociat mediului să fie luat în calcul. Astfel, obținem noile relații:

$$a_k \top x \leq b_k + M(1 - \sigma_k), \quad (32a)$$

$$-a_k \top x \leq -b_k + M\sigma_k, \quad (32b)$$

$$f(x) - M \sum_{k=1}^n \sigma_k^i + (2\sigma_k^i - 1)\sigma_k \leq t, \quad \forall \sigma^i \in \Sigma, \quad (32c)$$

unde σ_k a fost definit anterior; de asemenea, echivalențele de semn utilizate în acest context sunt '-' = '0' and '+' = '1'.

Fiind enunțate toate aceste abordări teoretice, vom ilustra mai jos și rezultatele obținute în simulare, pentru toate cele 4 metode descrise anterior (M1) - (M4)), după cum urmează: plecând de la dinamica enunțată în 33, considerăm matricile discrete $A = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & T \cdot \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \cdot \mathbf{I} \\ T \cdot \mathbf{I} \end{bmatrix}$, $C = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}]$, orizontul de predicție al MPC $N = 15$, respectiv matricile de penalizare $Q = \text{diag}\{\mathbf{I}, \mathbf{0}\}$, $R = \mathbf{I}$, $S = 100 \cdot Q$. \mathbf{I} . Agentul pleacă din $x_o = [-5 \quad 7.5]^\top$ și ajunge în $x_f = [10 \quad -10]^\top$. Rezultatele pot fi observate în Fig. 5a și 5b

metodă	# variabile binare	CPU time	lungime traiectorie
M1)	915+45+30	58.00	27.08
M2)	915+45+90	69.87	27.08
M3)	1215+30	115.40	27.08
M4)	720+30	92.93	29.98

Tabela 4: Caracteristici de modelare și rezultatele obținute în simulare

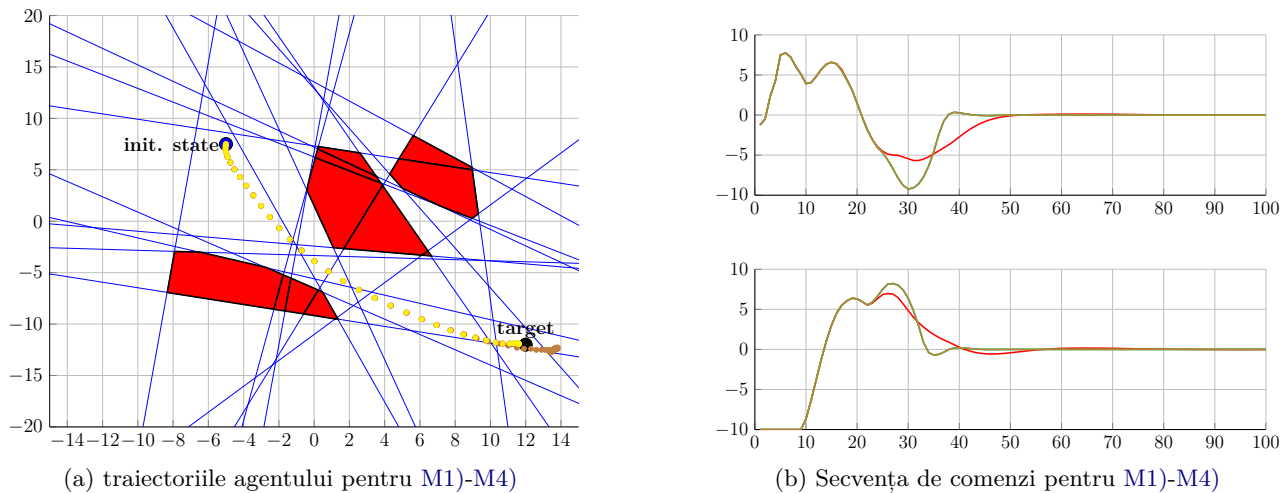


Figura 5: Ilustrații comportament agent pentru implementări MI echivalente

3.3 Sinteza unor legi de reglare complexe

Metodele descrise în următoarele două secțiuni tratează abordări în frecvență și realizare pe stare pentru sisteme liniare cu aplicație directă către obiectivul **Activității 2.3**, în sensul că eroarea de urmărire a unei referințe este asimilată unei neconcordanțe între timpul de simulare și cel *virtual* asociat evoluției de-a lungul referinței. Merită de asemenea menționat că deși dinamica sistemelor considerate este adesea neliniară, prin inversarea de model discutată în prima secțiune se ajunge la sisteme în buclă închisă, liniare.

3.3.1 Strategii de reglare în sens \mathcal{H}_2

Una din problemele centrale ale reglării moderne o constituie reglarea în sens \mathcal{H}_2 , care constituie echivalentul determinist al reglării optimale în sens Gaussian (Linear Quadratic Gaussian control). Fundamental, această problemă se reduce la minimizarea, peste mulțimea de regulatoare intern stabilizatoare, a normei Hardy-2 pentru transferul de la vectorul de semnale u_1 la vectorul y_1 , aa cum este pus în evidență în cadrul Figurii 6.

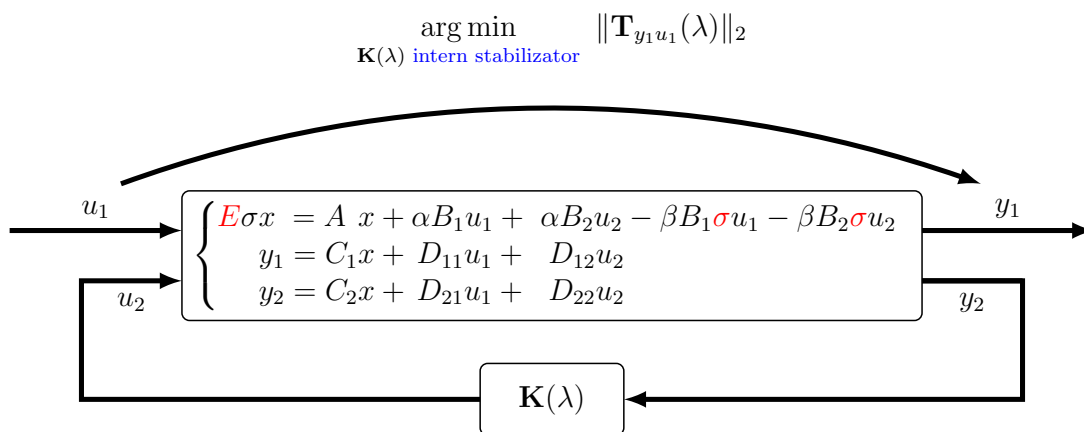


Figura 6: Schemă generalizată de reglare

În cadrul cercetării efectuate, s-a considerat cea mai generală clasă de sisteme liniare și invariante în timp, modelate cu ajutorul unor realizări de tip Rosenbrock particulare, numite realizări centrate. Principala dificultate asociată cu acest tip de sisteme, intitulată algebrico-dinamică, o constituie chiar partea algebrică, dată de singularitatea matricei (pătrate) E din ecuațiile de stare prezentate în Figura 6. Mai mult, cazul considerat este independent de domeniul de timp în care se modelează procesul ce se dorește reglat în sens \mathcal{H}_2 , de unde apariția operatorului $\sigma(\cdot)$ care semnifică derivarea

în raport cu timpul (în cazul sistemelor de timp continuu), sau avansul în timp cu o unitate (în cazul celor de timp discret). De asemenea, variabila complexă λ asimilează variabilele s și z , aferente transformărilor Laplace și \mathcal{Z} , din domeniile de timp respective.

Principala inovație a acestui demers o constituie utilizarea mapărilor conforme și bijective a planului complex extins, de tipul

$$f: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad f(\lambda) := \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Prin alegerea judicioasă celor patru scalari complecși ce definesc maparea, problema generalizată din Figura 6 se reduce la una standard, descrisă de ecuații clasice, pe spațiul stărilor în timp continuu, și pentru care există proceduri numerice mai eficiente (din punct de vedere computațional) decât cele care deservește reprezentările mai generale din Figura 6.

Soluția din timp continuu este una bine cunoscută din teoria funcțiilor matriceale raționale și se reduce la rezolvarea unei probleme de minimizare de normă a sistemului

$$\mathbf{T}_{y_1 u_1}(s) = \mathbf{T}_1(s) + \mathbf{T}_2(s)\mathbf{Q}(s)\mathbf{T}_3(s),$$

care este exprimat în mod afină ca funcție de o matrice rațională stabilă $\mathbf{Q}(s)$, ce servește drept termen liber al celebratei parametrizării Youla pentru regulatoare stabilizatoare. Sub anumite ipoteze de regularitate, soluția optimă este dată de

$$\mathbf{Q}(s) = -\mathbf{T}_{2o}^{-1}(s) [\mathbf{T}_{2i}^*(s)\mathbf{T}_1(s)\mathbf{T}_{3ci}^*(s)]_+ \mathbf{T}_{3co}^{-1}(s),$$

unde $[\cdot]_+$ semnifică partea stabilă a unei matrice raționale, iar $(\cdot)^*$ denotă adjuncta. În plus, termenii $\mathbf{T}_{2i}(s)$ și $\mathbf{T}_{2o}(s)$ definesc o factorizare inner-outer a lui $\mathbf{T}_2(s)$, în timp ce $\mathbf{T}_{3ci}(s)$ și $\mathbf{T}_{3co}(s)$ definesc o factorizare co-inner-outer a lui $\mathbf{T}_3(s)$.

În urma folosirii tehnicii bazate pe mapări conforme, s-a obținut o procedură numerică de până la 8 ori mai eficientă decât alte tehnici comparabile din literatura de specialitate, iar eficiența a fost demonstrată pentru un exemplu numeric pentru care obținerea regulatorului optimal s-a făcut cu un cost computațional de 5 ori mai scăzut decât cu ajutorul procedurii prezentate în [7]. În plus, s-au furnizat formulări bazate pe realizări centrate pentru parametrizarea Youla și pentru factorizările (co-)inner-outer și s-a arătat ca, atunci când regulatorul optimal este impropriu, orice regulator suboptimal ce păstrează norma \mathcal{H}_2 finită va trebui să fie de asemenea impropriu.

Soluția din timp discret este semnificativ mai elaborată și presupune rezolvarea unei probleme echivalente din timp continuu, ce se obține prin scalarea corespunzătoare a sistemului generalizat pentru care s-a aplicat o mapare conformă de tipul celei amintite anterior. Dacă $\mathbf{H}(z)$ este procesul generalizat al problemei iar $\tilde{\mathbf{H}}(s) := \mathbf{H}(f(s))$ este cel transformat, atunci se formează

$$\tilde{\mathbf{H}}_\varphi(s) := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{s+1}I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_{11}(s) & \tilde{\mathbf{H}}_{12}(s) \\ \tilde{\mathbf{H}}_{21}(s) & \tilde{\mathbf{H}}_{22}(s) - \tilde{\mathbf{H}}_{22}(\infty) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (s - \varphi)I \end{bmatrix}$$

pentru orice φ cu partea reală strict negativă și care nu este valoare proprie a fasciculului de poli al lui $\tilde{\mathbf{H}}(s)$. Sub anumite ipoteze de regularitate, această problemă are o soluție ce se poate exprima prin rezolvarea a două ecuații matriceale algebrice Riccati și care constă într-un regulator optimal $\tilde{\mathbf{K}}_\varphi(s)$. Regulatorul căutat pentru problema originală va fi dat de

$$\mathbf{K}(z) = \frac{1}{f^{-1}(z) - \varphi} \tilde{\mathbf{K}}_\varphi(f^{-1}(z)) \left(I - \tilde{\mathbf{H}}_{22}(\infty) \frac{1}{f^{-1}(z) - \varphi} \tilde{\mathbf{K}}_\varphi(f^{-1}(z)) \right)^{-1},$$

pentru oricare φ ales în maniera anterior precizată. Mai mult, parametrizarea lui Youla poate fi folosită pentru a produce un regulator suboptimal (arbitrar de aproape de cel optimal) și propriu, atunci când raționala $\left(I - \tilde{\mathbf{H}}_{22}(\infty) \frac{1}{f^{-1}(z) - \varphi} \tilde{\mathbf{K}}_\varphi(f^{-1}(z)) \right)$ nu are rang întreg pentru $z \rightarrow \infty$. Acest nou regulator garantează implementări cauzale pentru legile de reglare ce se obțin.

Drept urmare a acestei noi tehnici, s-a produs un regulator stabilizator ce asigură o normă \mathcal{H}_2 de

2 ori mai mică decât procedura propusă în [3] pentru același exemplu numeric. În plus, s-a clarificat formula pentru valoarea normei \mathcal{H}_2 , formulată în [9] și asigurată de aceste tipuri de reglatoare, atunci când aceasta se exprimă pe baza soluțiilor celor două ecuații Riccati amintite anterior.

3.3.2 Analiza complexității pentru formularea MPC explicită

Am analizat problema tipică MPC (model liniar, cost quadratic, constrângeri liniare):

$$\mathbf{u}_N^* = \arg \min_{\mathbf{u}_N} x_N^\top S x_N + \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^\top Q x_k + u_k^\top R u_k), \quad (33a)$$

$$\text{s.t. } x_{k+1} = A x_k + B u_k, \quad (33b)$$

$$y_k = C x_k, \quad (33c)$$

$$x_k \in \mathcal{X}, u_k \in \mathcal{U}, y_k \in \mathcal{Y}, x_N \in \mathcal{X}_f, \quad (33d)$$

și am arătat că atunci când (așa cum de fapt este de obicei cazul) constrângerile se pot scrie într-o formă zonotopică, se ajunge la o expresie compactă a cărei rescrie în formă duală (bazată pe condițiile necesare de optimalitate KKT).

$$\text{staționaritate: } H \mathbf{u}_N^* + F^\top x_0 + \sum_i V^{i\top} \mu^i = 0, \quad (34a)$$

$$(\lambda^{i,+} - \lambda^{i,-}) - G^{i\top} \mu^i = 0, \quad (34b)$$

$$\text{fezabilitate primală: } T^i x_0 + V^i \mathbf{u}_N^* = c^i + G^i \gamma^{i,*}, \quad (34c)$$

$$|\gamma^{i,*}| \leq 1, \quad (34d)$$

$$\text{fezabilitate duală: } \lambda^{i,\pm} \geq 0, \quad (34e)$$

$$\text{complementaritate: } \lambda^{i,\pm} \times (\pm \gamma^{i,*} - 1) = 0, \quad (34f)$$

Enumerând toate seturile candidate de indici activi și păstrându-le numai pe cele care corespund regiunilor critice nevide conduce la partiționarea poliedrală a spațiului x_0 din Fig. 7a. Avantajul ilustrat de metoda noastră este că, exploatând structura domeniului fezabil (ca o intersecție de zonotopi), ne permite să reducem spațiul de căutare și, prin urmare, să reducem numărul de seturi candidat (v. fig. 7b unde sunt ilustrate limite pentru abordarea poliedrală – roșu, respectiv zonotopică – albastru).

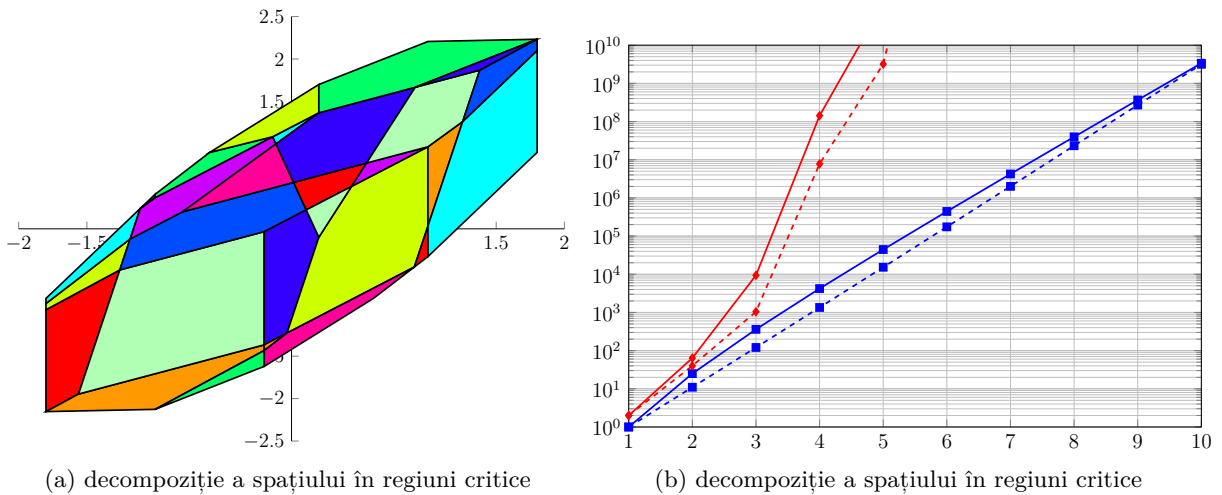


Figura 7: Ilustrații pentru problema MPC explicită

Am arătat că simetriile problemei MPC standard pot fi exploatate pentru a construi eficient soluția “MPC explicită”. Acest lucru se face prin exprimarea domeniului fezabil ca o intersecție a mulțimilor zonotopice. Ulterior, s-a demonstrat că structura combinatorie conduce la o enumerare eficientă a mulțimilor active candidate și admite limite strânse pentru complexitatea reprezentării.

4 Diseminarea rezultatelor

Rezultatele acestei etape au fost diseminate prin lucrări publicate (două articole de revistă Q1 și încă unul indexat ISI; cinci articole de conferință, indexate sau în curs de indexare ISI/BDI), depuse (un articol Q1 și o conferință de top) și în pregătire pentru publicare (un articol Q1), enumerate în continuare.

Rutinele Matlab/Python care implementează rezultatele teoretice descrise anterior **sunt încărcate în proiectul https://gitlab.com/constrained_optimization/replan_tools.**

Articole publicate:

- P1) **Ionescu, T. C.**, O. V. Iftime și I. Necoara. “Model reduction with pole-zero placement and high order moment matching”. În: *Automatica*, pag. 1–9, 2021. ISSN: 0005-1098. Elsevier **IF: 5.944**. **Q1-IF** (Automation & Control Systems - 9/63), **Q1-IF** (Engineering, Electrical & Electronic - 31/266).
- P2) **Sperilă, A.**, C. Oară și **B. D. Ciubotaru**. “H2 Output Feedback Control of Differential-Algebraic Systems”. În: *IEEE Control Systems Letters (L-CSS)*, pag. 542–547, 2021. ISSN: 2475-1456
. Not yet indexed, the journal is not old enough. DOI: [10.1109/LCSYS.2021.3083399](https://doi.org/10.1109/LCSYS.2021.3083399). Wos: 000668835800008
- P3) **Sperilă, A.**, **B. D. Ciubotaru** și C. Oară. “The optimal H2 controller for generalized discrete-time systems”. În: *Automatica*, 2021. ISSN: 0005-1098. Elsevier **IF: 5.944**. **Q1-IF** (Automation & Control Systems - 9/63), **Q1-IF** (Engineering, Electrical & Electronic - 31/266). Wos: 000702835200041
- P4) **Pătrașcu, M.** și L. A. Vișcoțel. “Design of Stabilizing Predictor-based Controller for Closed Loop Traffic Control with Real-Coded Genetic Algorithms”, în: *European Control Conference, Rotterdam, Netherlands*. 2021.
- P5) **Pătrașcu, M.** “Smith Predictor Approximation for Industrial Control Applications with Genetic Algorithms”, pag. 1–6. În: *International Conference on Applied Artificial Intelligence (ICAPAI'21)*. 2021. DOI: [10.1109/ICAPAI49758.2021.9462066](https://doi.org/10.1109/ICAPAI49758.2021.9462066).
- P6) **Stoican, F.** și Ș.-S. Mihai. “Observations on the complexity of the explicit MPC”,. În: *60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'21)*. 2021.
- P7) Olaru, S., **F. Stoican** și S. Kheawhom. “Challenges and opportunities for the control of Energy Storage Systems. A focus on the Zinc-Air batteries”, pag. 1–6. În: *IEEE AFRICON.*, 2021. DOI: [10.1109/AFRICON51333.2021.9571020](https://doi.org/10.1109/AFRICON51333.2021.9571020).
- P8) Do Huu, T., I. Prodan și **F. Stoican**. “Analysis of Alternative Flat Representations of a UAV for Trajectory Generation and Tracking”, pag. 58–63. În: *25th International Conference on System Theory, Control and Computing*. 2021. DOI: [10.1109/ICSTCC52150.2021.9607073](https://doi.org/10.1109/ICSTCC52150.2021.9607073).

Articole trimise:

- P9) **Stoican, F.**, J. Culiță și S. Olaru. “Set-theoretic fault-diagnosis for a real-world two-tank system”. În: *ISA Transactions*, 2022 (under review). ISSN: 0019-0578. Elsevier **IF: 5.468**. **Q1-IF** (Automation & Control Systems - 13/63).
- P10) **Stoican, F.**, T.-G. Nicu și I. Prodan. “A mixed-integer MPC with polyhedral potential field cost for collision avoidance”, în: *Proceedings of the American Control Conference (ACC'22)*. 2022 (under review).

Articole în pregătire:

- P11) **Stoican, F.** și I. Prodan. “The application of quasi-interpolants for complexity reduction in motion planning”.

Referințe

- [1] Quoc Huy Tran, N. “Motion planning for multi-agent dynamical systems in a variable environment”. 2019.
- [2] **Stoican, F.**, I. Prodan și D. Popescu. “Flat trajectory generation for way-points relaxations and obstacle avoidance”, pag. 695–700. În: 2015.
DOI: [10.1109/MED.2015.7158827](https://doi.org/10.1109/MED.2015.7158827).
- [3] Tudor, F. S. și C. Oară. “ \mathcal{H}_2 optimal control for generalized discrete-time systems”. În: *Automatica*, pag. 1526–1530, 2014.
- [4] Vielma, J. P., S. Ahmed și G. Nemhauser. “Mixed-integer models for nonseparable piecewise-linear optimization: Unifying framework and extensions”. În: *Operations research*, pag. 303–315, 2010. INFORMS.
- [5] Bordons, C. și E. Camacho. *[titlecase]title. [titlecase]subtitle*. 2004.
- [6] Boyd, S. și L. Vandenberghe. *Convex optimization*, 2004. Cambridge university press.
- [7] Takaba, K. și T. Katayama. “ \mathcal{H}_2 Output Feedback Control for Descriptor Systems”. În: *Automatica*, pag. 841–850, 1998.
- [8] Fliess, M., J. Lévine, P. Martin și P. Rouchon. “Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples”. În: *International journal of control*, pag. 1327–1361, 1995. Taylor & Francis.
- [9] Ionescu, V. și M. Weiss. “The l^2 -control problem for time-varying discrete systems”. În: *Systems & Control Letters*, pag. 371–381, 1992.
- [10] Slotine, J.-J. E., W. Li și alții. *Applied nonlinear control*, 1991. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ.

