

RAPORTARE ȘTIINȚIFICĂ - Etapa 3 (finală)

proiect TE27/2020 - RePlan (PN-III-P1-1.1-TE-2019-1614)
Reliable motion planning for nonlinear systems under uncertainties

10 august 2022

Cuprins

1	Obiectivele prevăzute / realizate	2
2	Rezultate obținute	3
2.1	Extensii ale parametrizării B-spline pentru reprezentări plate	3
2.1.1	<i>Descrieri analitice ale contrângerilor și costurilor prin intermediul ieșirilor plate</i>	3
2.1.2	<i>Analiza a metodelor euristice pentru rezolvarea problemelor de optimizare asociate</i>	3
2.1.3	<i>Analiză metodelor de reducere dimensională pentru reprezentări complexe</i>	4
2.2	Parametrizări plate echivalente pentru modele neliniare de tip dronă	5
2.3	Reprezentări compacte pentru funcții afine pe porțiuni	8
2.4	Sinteza unor legi de reglare complexe	17
2.4.1	<i>Strategii de reglare în sens \mathcal{H}_2</i>	17
2.4.2	<i>Analiza complexității pentru formularea MPC explicită</i>	18
2.5	Validări experimentale	19
3	Diseminarea și impactul rezultatelor	21
3.1	Activități de diseminare	21
3.2	Impact estimat al rezultatelor obținute:	22

1 Obiectivele prevăzute / realizate

Proiectul REPLAN propune diverse proceduri pentru calcularea fiabilă a traiectoriilor într-un cadru multi-agent (e.g., generarea traiectoriei offline, urmărirea și reconfigurarea acesteia) în posibila prezență a perturbațiilor și a incertitudinilor de model.

Ideea principală este de a exploata instrumente teoretice (platitudine, funcții NURBS, elemente de teoria mulțimilor – în sens geometric) pentru a obține o colecție de traiectorii care respectă dinamica internă și constrângerile operaționale (evitarea coliziunilor, restricții de acoperire, urmărirea țintei etc.) agenții minimizând în același timp costurile date (de exemplu, timpul până la destinație, consumul de energie, lungimea traseului etc.). Am fost de asemenea interesați de validarea în simulare și experimentală a rezultatelor folosind platforme robotice tipice testării de laborator (e.g, nano-drone).

Principalele obiective ale REPLAN sunt enumerate prin activitățile de mai jos, grupate în etape și parte a planului de lucru asociat proiectului:

Etapa 1 Generare offline pentru traiectorii folosind parametrizări NURBS [WP1]:

Act 1.1 Descrieri analitice ale contrângerilor și costurilor prin intermediul ieșilor plate [WP1.1];

Act 1.2 Analiză a metodelor euristice pentru rezolvarea problemelor de optimizare asociate [WP1.2];

Act 1.3 Analiză a metodelor de reducere dimensională pentru reprezentări complexe [WP1.3].

Etapa 2 Îmbunătățiri ale parametrilor de robustețe și performanță în cazul variațiilor de model [WP2]:

Act 2.1 Implementare a unor formulări robuste, capabile să trateze variații de model nestructurate [WP2.3];

Act 2.2 Implementare a unor formulări adaptive, capabile să trateze variații de model structurate [WP2.2];

Act 2.3 Analiză a variațiilor de timp de-a lungul traiectoriei obținute prin parametrizări plate [WP2.3].

Etapa 3 Validări în scenarii de control complexe [WP3]

Act 3.1 Validări prin simulări ce nu implică reconfigurări ale arhitecturii de reglare [WP3.1];

Act 3.2 Validări prin simulări ce implică reconfigurări ale arhitecturii de reglare [WP3.2];

Act 3.3 Validări prin experimente ce implică vehicule autonome [WP3.3].

Obiectivele proiectului au fost îndeplinite prin intermediul activităților asociate. Rezultatele s-au concretizat prin următoarele livrabile:

D1 site proiect – replan.upb.ro;

D2 raport tehnic pentru cazul nominal, cu strategii de reducere a dimensiunii și a complexității;

D3 Raport tehnic ce prezintă rezultatele pentru cazul cu incertitudini cu perturbații bornate, cu implementări robuste și adaptive;

D4 Raport tehnic pentru strategii și arhitecturi de reglare pentru sisteme cu un singur și cu mai mulți agenți;

D5 Raport tehnic ce enumeră scenarii de simulare și rezultatele aferente în platforma ROS/Gazebo;

D6 Raport tehnic ce enumeră scenarii de testare experimentală și rezultatele aferente;

D7 Biblioteca cod sursă disponibilă online;

D8 Pregătirea și publicarea unor articole de conferință/revistă, astfel: pregătire un articol de revistă de top și două articole de conferință per etapă. Indicatorul a fost îndeplinit:

– 4 articole publicate în reviste (**3 Q1** și încă unul indexat ISI);

– 8 articole de conferință, indexate sau în curs de indexare ISI/BDI (2 indexate ISI, 4 în curs de indexare ISI, 2 indexate BDI);

– 3 articole depuse (două în reviste Q1 și unul pentru o conferință de top);

– 2 articole în pregătire pentru publicare (ambele în reviste Q1).

2 Rezultate obținute

Rezultatele științifice asociate proiectului sunt enumerate în secțiunile următoare. Împărțirea în secțiuni nu reflectă neapărat clasificarea pe etape (un anumit topic poate să apară într-o publicație aferentă etapei 2 dar și într-o publicație din etapa 3 de exemplu).

2.1 Extensii ale parametrizării B-spline pentru reprezentări plate

Am studiat problematica planificării mișcării prin modelare cu variabile mixte în juxtapunere cu abordarea duală, unde traiectoria este calculată offline prin funcții NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines [4, 9]). Plecând de la o secvență monoton crescătoare de momente de timp $\zeta = \{\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_m\}$, și considerând ordinul $d \leq m - 2$ scriem relația recursivă care definește funcțiile B-spline de ordin d :

$$B_{\ell,d,\zeta}(t) = \frac{t - \tau_\ell}{\tau_{\ell+d} - \tau_\ell} B_{\ell,d-1,\zeta}(t) + \frac{\tau_{\ell+d+1} - t}{\tau_{\ell+d+1} - \tau_{\ell+1}} B_{\ell+1,d-1,\zeta}(t), \quad B_{\ell,0,\zeta}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\tau_\ell, \tau_{\ell+1}), \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (1)$$

Funcțiile NURBS de ordin d se obțin ponderând cu termenii (1) cu $\{\omega_1, \dots, \omega_n\} \geq 0$:

$$R_{\ell,d,\zeta}(t) = \frac{B_{\ell,d,\zeta}(t)\omega_\ell}{\sum_{i=1}^n B_{i,d,\zeta}(t)\omega_i}, \quad \forall \ell = 1, \dots, n. \quad (2)$$

2.1.1 Descrieri analitice ale contrângerilor și costurilor prin intermediul ieșirilor plate

Considerăm o regiune $S = \{z \in \mathbb{R}^q : a_k^\top z \geq b_k, k = 1 \dots n_c\}$ și folosind o ieșire plată parametrizată ca $z(t) = \sum_{i=1}^n P_i R_{i,d,\zeta}(t)$, constrângerea $a_k^\top z \geq b_k$ devine la rândul său o curbă B-spline: $\bar{z}_k(t) = \sum_{\ell=s}^{s+d} (a_k^\top P_\ell - b_k) N_{\ell,d,\zeta}(t) \geq 0, t \in [t_s, t_{s+1})$.

Extinzând pentru cazul neliniar și analizând o dinamică UAV simplificată ca exemplu (unde $z(t) = [z_1(t) \ z_2(t)]^\top$) scriem unghiul de ruliu și condiția care i se asociază ($\underline{\phi} \leq \phi(t) \leq \bar{\phi}$):

$$f(t) = g \tan \phi(t) = \frac{\ddot{z}_2(t)\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)\ddot{z}_1(t)}{\sqrt{\dot{z}_1^2(t) + \dot{z}_2^2(t)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n+2} \sum_{j=1}^{n+1} (P''_{2,i} P'_{1,j} - P'_{1,i} P''_{2,j}) B_{i,d-2}(t) B_{j,d-1}(t)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} \sum_{\ell=1}^{n+1} (P'_{1,k} P'_{1,\ell} + P'_{2,k} P'_{2,\ell}) B_{k,d-1}(t) B_{\ell,d-1}(t)}}. \quad (3)$$

Pe baza acestei formulări obținem o relație care implică doar punctele de control ale reprezentării (atenție relația anterioară este corectă doar în cazul în care ponderile NURBS sunt egale):

$$g \tan \underline{\phi} \leq \frac{P''_{2,i} P'_{1,j} - P'_{1,i} P''_{2,j}}{\sqrt{P'_{1,k} P'_{1,\ell} + P'_{2,k} P'_{2,\ell}}} \leq g \tan \bar{\phi}, \quad \forall i, j, k, \ell. \quad (4)$$

Abordări similare, dacă modelul matematic neliniar admite o reprezentare plată [11], sunt posibile. În cursul acestui proiect am identificat două probleme a căror rezolvare este propusă în continuare.

2.1.2 Analiza a metodelor euristice pentru rezolvarea problemelor de optimizare asociate

Rezolvarea exactă unei probleme de optimizare neliniară în cost și/sau constrângeri (precum cea indusă de planificarea unei traiectorii într-un spațiu cu obstacole) este dificilă. Soluții euristice care reduc semnificativ timpul de calcul cu prețul unei scăderi rezonabile a performanței sunt așadar acceptabile:

- folosirea metricii "ν-gap" [1] dintre două sisteme pentru a defini un set de funcții de ponderare ce combină eforturile mai multor regulatoare, proiectate în puncte statice de funcționare diferite,

cu scopul de a asigura tranziția în condiții de stabilitate și fără șocuri pe comandă între aceste puncte de funcționare. Algoritmii sunt testați pe modelul neliniar și incert al unui avion civil de pasageri (un alt exemplu de sistem cu dinamică neliniară), iar traiectoria impusă în plan transversal este urmărită cu o deviație neglijabilă în plan vertical;

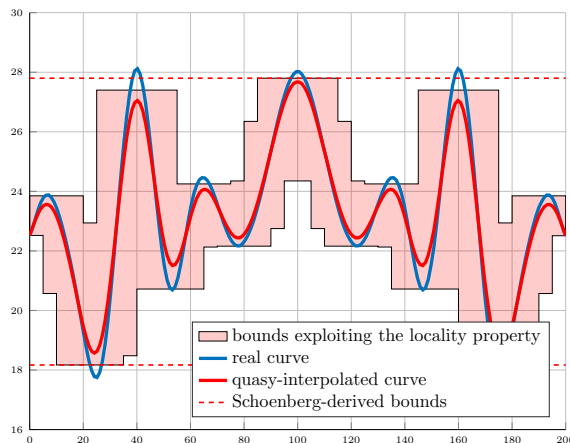
- o metodă bazată pe algoritmi genetici pentru proiectarea reguletoarelor cu predictor aplicabile în cazul plutoanelor-șir; problema de optimizare este neliniară, cu componente de tip releu cu lățime variabilă și urmărește optimizarea comportamentului de descărcare al cozilor de așteptare (spre exemplu alocarea unei rampe de lansare, așteptare pentru accesarea zonei de andocare, cozi de așteptare la accesarea zonelor de memorie sau a resurselor computaționale partajate etc.); pentru ilustrare, s-a considerat un pluton de autohevice pe un tronson de drum urban P5);
- soluțiile exacte sunt adesea neliniare în cost și/sau neconvexe în constrângeri; prin urmare am studiat o metodă iterativă de învățare a traiectoriei ce rezolvă probleme intermediare simplificate P10).

2.1.3 Analiză metodelor de reducere dimensională pentru reprezentări complexe

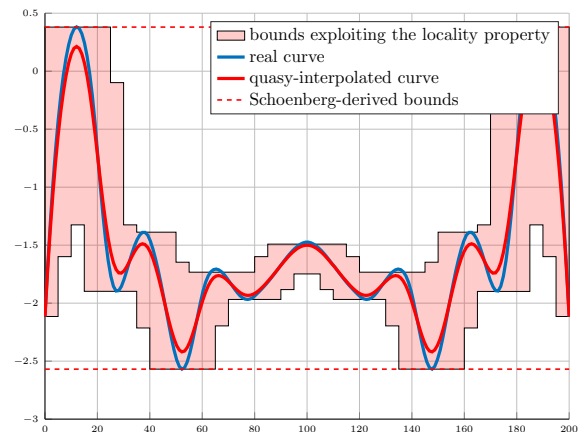
Reducerea complexității pentru o reprezentare ca cea din (3)–(4) poate fi atacată din mai multe direcții:

- reprezentarea simplificată a modelului prin aplicarea unor proceduri de reducere dimensională precum cele studiate în P1) conduce la o parametrizare simplificată: sistemului redus îi corespunde o reprezentare plată care este folosită pentru a genera un profil de referință ce este mai apoi urmărit de modelul complex;
- deoarece reprezentarea plată nu este unică, se pot studia clase de echivalență și selecta reprezentanți care conduc la forme simplificate ale constrângerilor și costurilor [2]; această abordare este relevantă din perspectiva reducerii dificultății problemei de optimizare;
- aproximarea directă a curbei B-spline/NURBS; în particular am studiat operatorul Schoenberg, P16):

$$\tilde{f}(t) = \sum_{i=1}^n f(\xi_{i,d,\xi}^*) \tilde{B}_{i,d}(t). \quad (5)$$



(a) $V_a(t)$



(b) $\phi(t)$

Spre exemplu, pentru $f(t) = g \tan \phi$, unghiul de rulu și $f(t) = V_a(t)$, viteza față de sol, am obținut curbele din figura de pe pagina anterioară. Rezultatele sunt încurajatoare și în continuare studiem modalități de a generaliza abordarea și de îmbunătăți valorile teoretice ale bornelor (în prezent acestea sunt conservative). În particular, vom studia cazul în care $f(t)$, așa cum este de fapt cazul pentru noi, este la rândul său o combinație neliniară de funcții spline.

Rezultatele științifice asociate acestei sub-sectiuni acoperă mai multe domenii de interes, pornind de la modelări pentru diverse sisteme neliniare, parametrizări plate echivalente și strategii de reglare

pentru urmărirea cu garanții de stabilitate / robustețe a unor traiectorii de referință generate cu funcții spline.

2.2 Parametrizări plate echivalente pentru modele neliniare de tip dronă

Studiul a mai multor parametrizări plate pentru acel sistem dinamic neliniar permite să realizăm atât obiectivele **Activității 2.1** cât și pe cele ale **Activității 2.2**.

Introducem mai întâi pe scurt modelul UAV 2D utilizat în continuare și amintim formularea standard a problemei generării traiectoriei și proiectării legii de reglare:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_a \cos \psi + W_x, \\ \dot{y} &= V_a \sin \psi + W_y, \\ \dot{\psi} &= \frac{g \tan \phi}{V_a}, \end{aligned} \tag{6}$$

unde (x, y) și ψ sunt poziția și unghiul de girație. W_x și W_y sunt componentele de viteză ale perturbației (vânt). Reglarea dinamicii este asigurată prin controlul vitezei față de aer V_a și a unghiului de tangaj ϕ . Scriind compact $\dot{\xi} = f(\xi, u)$, unde $\xi = [x \ y \ \psi]^\top \in \mathbb{R}^3$, $u = [V_a \ \phi]^\top \in \mathbb{R}^2$ și $f(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ denotă dinamica (6), observăm că avem un sistem plat dacă și numai dacă există o ieșire plată $z = \Phi(\xi, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots) \in \mathbb{R}^2$, ce permite să exprimăm algebric restul stărilor și intrărilor în funcție de z și un număr finit de derivate ale acestuia [15].

În continuare, similar cu [6], parametrizăm ieșirea plată ca o combinație de funcții spline $\mathbf{B}_d(t) = [B_{0,d}(t), \dots, B_{n,d}(t)]^\top$ prin intermediul punctelor de control $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2 \times n} = [P_0, \dots, P_n]$ așa încât:

$$z(t) = \mathbf{P}\mathbf{B}_d(t), \quad \forall t \in [t_0, t_N]. \tag{7}$$

Putem acum reduce problema de reglare la investigația unui sistem companion [17], reprezentat ca:

$$\dot{\xi} = f(\xi, u) \tag{8}$$

unde se aplică următoarea transformare a intrării:

$$\begin{cases} z &= z(\xi, \dot{\xi}, \dots), \\ u &= u(v, \xi, \dot{\xi}, \dots), \end{cases} \tag{9}$$

astfel încât sistemul neliniar să fie convertit într-o formă liniară echivalentă invariantă în timp:

$$\begin{cases} z^{(n)} &= v, \\ v &= z_{ref}^{(n)} + K_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + K_0e, \end{cases} \tag{10}$$

unde v este controlul virtual indus de reprezentarea plată, $e = z_{ref} - z$ este diferența dintre referința z_{ref} și z , iar coeficienții K_i cu $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ vor fi aleși astfel încât polii ecuației caracteristice să asigure stabilitatea modelului în buclă închisă. Prin urmare, ecuația (10) devine:

$$e^{(n)} + K_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + K_0e = 0. \tag{11}$$

Majoritatea rezultatelor din literatură trec rapid peste alegerea unei ieșiri plate și merg direct la sinteza regulatorului. Aici, intenționăm să investigăm mai multe reprezentări plate și să observăm modul în care acestea afectează (în bine sau în rău) procedurile de generare a traiectoriei și proiectare a regulatorului.

Stările și intrările rămase sunt exprimate ca în ecuația (12) care este detaliată în tabela 1:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ u \end{bmatrix} = \Phi_1(z, \dot{z}, \ddot{z}). \tag{12}$$

Același proces este aplicat pentru a doua reprezentare plată. În această selecție, coordonate cilindrice

Tabela 1: Reprezentări plate corespunzătoare diferitelor ieșiri plate.

Stări și intrări	rep. 1 $\Phi_1(\cdot)$	rep. 2 $\Phi_2(\cdot)$	rep. 3 $\Phi_3(\cdot)$	rep. 4 $\Phi_4(\cdot)$
x	z_1	$z_1 \cos z_2$	z_1	$z_2 - \dot{z}_1$
y	z_2	$z_1 \sin z_2$	$z_2 - \dot{z}_1$	$z_1 + \ddot{z}_1 - \dot{z}_2$
$\tan \psi$	$\frac{\dot{z}_2}{\dot{z}_1}$	$\frac{\dot{z}_1 \sin z_2 + \dot{z}_2 z_1 \cos z_2}{\dot{z}_1 \cos z_2 - \dot{z}_2 z_1 \sin z_2}$	$\frac{\dot{z}_2 - \dot{z}_1}{\dot{z}_1}$	$\frac{\ddot{z}_1 + \dot{z}_1 - \dot{z}_2}{\dot{z}_2 - \dot{z}_1}$
V_a	$\sqrt{\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2}$	$\sqrt{\dot{z}_1^2 + z_1^2 \dot{z}_2^2}$	$\sqrt{\dot{z}_1^2 + (\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2}$	$\sqrt{(\ddot{z}_1 + \dot{z}_1 - \dot{z}_2)^2 + (\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2}$
$\tan \phi$	$\frac{1}{g} \frac{\ddot{z}_2 \dot{z}_1 - \dot{z}_1 \ddot{z}_2}{\sqrt{\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2}}$	$f_1(z, \dot{z}, \ddot{z}) + f_2(z, \dot{z})$	$\frac{(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) \ddot{z}_1 - (\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1) \dot{z}_1}{g \sqrt{\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2}}$	$g_1(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}, z^{(4)}) + g_2(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}})$

sunt folosite pentru a descrie sistemul:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan \frac{y}{x} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Stările și intrările sunt exprimate ca în ecuația (14), detaliată în a treia coloană a tabelului 1:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ u \end{bmatrix} = \Phi_2(z, \dot{z}, \ddot{z}). \quad (14)$$

unde

$$f_1(z, \dot{z}, \ddot{z}) = \frac{\ddot{z}_2 \dot{z}_1 z_1 - \dot{z}_1 \ddot{z}_2 z_1}{g \sqrt{\dot{z}_1^2 + z_1^2 \dot{z}_2^2}}, \quad f_2(z, \dot{z}) = \frac{2\dot{z}_1^2 \dot{z}_2 + \dot{z}_2^3 z_1^2}{g \sqrt{\dot{z}_1^2 + z_1^2 \dot{z}_2^2}}.$$

Stările și intrările rămase sunt exprimate ca în ecuația (15), detaliată în a 4a coloană a tabelului 1:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ u \end{bmatrix} = \Phi_3(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}). \quad (15)$$

Următoarea reprezentare plată este o combinație între poziția, viteza și accelerația sistemului:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} + y \\ x + \ddot{x} + \dot{y} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Stările și intrările rămase sunt exprimate ca în ec. (17), detaliată în ultima coloană a tabelului 1:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ u \end{bmatrix} = \Phi_4(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}, z^{(4)}). \quad (17)$$

unde

$$g_1(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}, z^{(4)}) = \frac{(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)(z_1^{(4)} + \ddot{z}_1 - \ddot{\ddot{z}}_2)}{g \sqrt{(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2 + (\ddot{z}_1 + \dot{z}_1 - \ddot{z}_2)^2}}, \quad g_2(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}) = \frac{(\ddot{z}_2 - \ddot{\ddot{z}}_1)(\ddot{\ddot{z}}_1 + \dot{z}_1 - \dot{z}_2)}{g \sqrt{(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2 + (\ddot{z}_1 + \dot{z}_1 - \ddot{z}_2)^2}}.$$

Aceste ieșiri plate sunt inspirate din diverse surse: ieșirea plată 1 din tabela 1 este cea mai folosită în literatură, în timp ce a doua ieșire plată în (13) exploatează o schimbare a coordonatele și ultimele două ieșiri plate sunt derivate din faptul că, dacă $[z_1 \ z_2]^T$ este o ieșire plată, atunci $[z_1 \ z_2 + \dot{z}_1]^T$ este, de asemenea, o ieșire plată. Toate reprezentările plate de mai sus se găsesc cunoscând descrierea completă a sistemului (intrări, ieșiri).

Considerăm în continuare o colecție de puncte intermediare (și momente de timp asociate):

$$\mathbb{W} = \{w_1, w_2, \dots, w_N\}, \quad \mathbb{T}_W = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}, \quad (18)$$

și rezolvăm o problemă de optimizare de constrângeri ce garantează trecerea prin aceste momente

specificate de timp:

$$\begin{bmatrix} x(t_k) \\ y(t_k) \end{bmatrix} = w_k \in \mathbb{W}. \quad (19)$$

Ca și cost, considerăm:

$$\mathbf{P} = \arg \min_{\mathbf{P}} \int_{t_0}^{t_N} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) dt \quad (20)$$

În continuare, detaliem pentru reprezentarea 4 a ieșirii plate costul (20):

$$\tilde{\Xi}_4(\mathbf{B}_d(t), \mathbf{P}) = (\ddot{z}_1 + \dot{z}_1 - \ddot{z}_2)^2 + (\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2. \quad (21)$$

Similar, constrângerile (19) devin:

$$\begin{bmatrix} x(t_k) \\ y(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2(t_k) - \dot{z}_1(t_k) \\ z_1(t_k) + \dot{z}_1(t_k) - \dot{z}_2(t_k) \end{bmatrix} = w_k. \quad (22)$$

Alegând intrările sistemului ca:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \tan \phi \end{bmatrix} = u(z, \dot{z}, \ddot{z}), \quad (23)$$

intrarea virtuală nominală devine $v = \ddot{z}$. Pentru a lua în calcul erorile de urmărirea, implementăm un mecanism de feedback:

$$v = \ddot{z}_{ref} + K_1 \dot{e}_z + K_2 \int e_z dt + K_3 e_z. \quad (24)$$

Pentru ilustrare, folosim lista de 6 puncte intermediare și marcajele temporale asociate, luate echidistant între t_0 și $t_N = 45s$, pentru problema generării traiectoriei:

$$\mathbb{W} = 10^2 \times \left\{ \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1.3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1 \\ 1.2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.6 \\ -0.9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.2 \\ -1.2 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathbb{T}_W = \{0, 9, 18, 27, 36, 45\}. \quad (25)$$

Fig. 1 prezintă profilurile stării, intrării precum și a traiectoriei, generate cu cele 4 reprezentări plate propuse în (12), (14), (15) și respectiv (17).

Tabela 2: Parametri și rezultate

	rep. 1	rep. 2	rep. 3	rep. 4
număr puncte de control	6	6	6	6
ordin B-spline	3	3	4	5
valoare cost ($\times 10^4 m^2/s$)	1.1332	1.3540	1.1772	1.2580
lungime curbă (m)	670.75	709.09	675.46	689.46

Parametrii și performanțele fiecărei implementări sunt date în tabela 2.

În plus, în această simulare, oferim 4 scenarii diferite ale vectorului de perturbare a vântului (W) pentru a experimenta dependența erorii de urmărirea de direcția vântului. Detaliile sunt furnizate în tabelul 3 unde $RMS(e_{ij})$ este valoarea pătratică medie a erorii de urmărirea pe axa i ($i \in \{x, y\}$) implementat cu legea de control j ($j \in \{1, 2\}$).

Pentru ilustrare, în Fig. 2 arătăm variația costului și lungimea traiectoriei rezultate (cele două sunt în strânsă legătură deoarece costul minimizează energia traiectoriei) și erorile de urmărirea în poziție și unghi de girație prin două implementări ale legii de reglare în buclă închisă.

Parametrii K_1 , K_2 și K_3 sunt aleși din ecuația caracteristică cu polii p_1 , p_2 și p_3 astfel încât:

$$(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) = s^3 - K_3 s^2 + K_1 s + K_2. \quad (26)$$

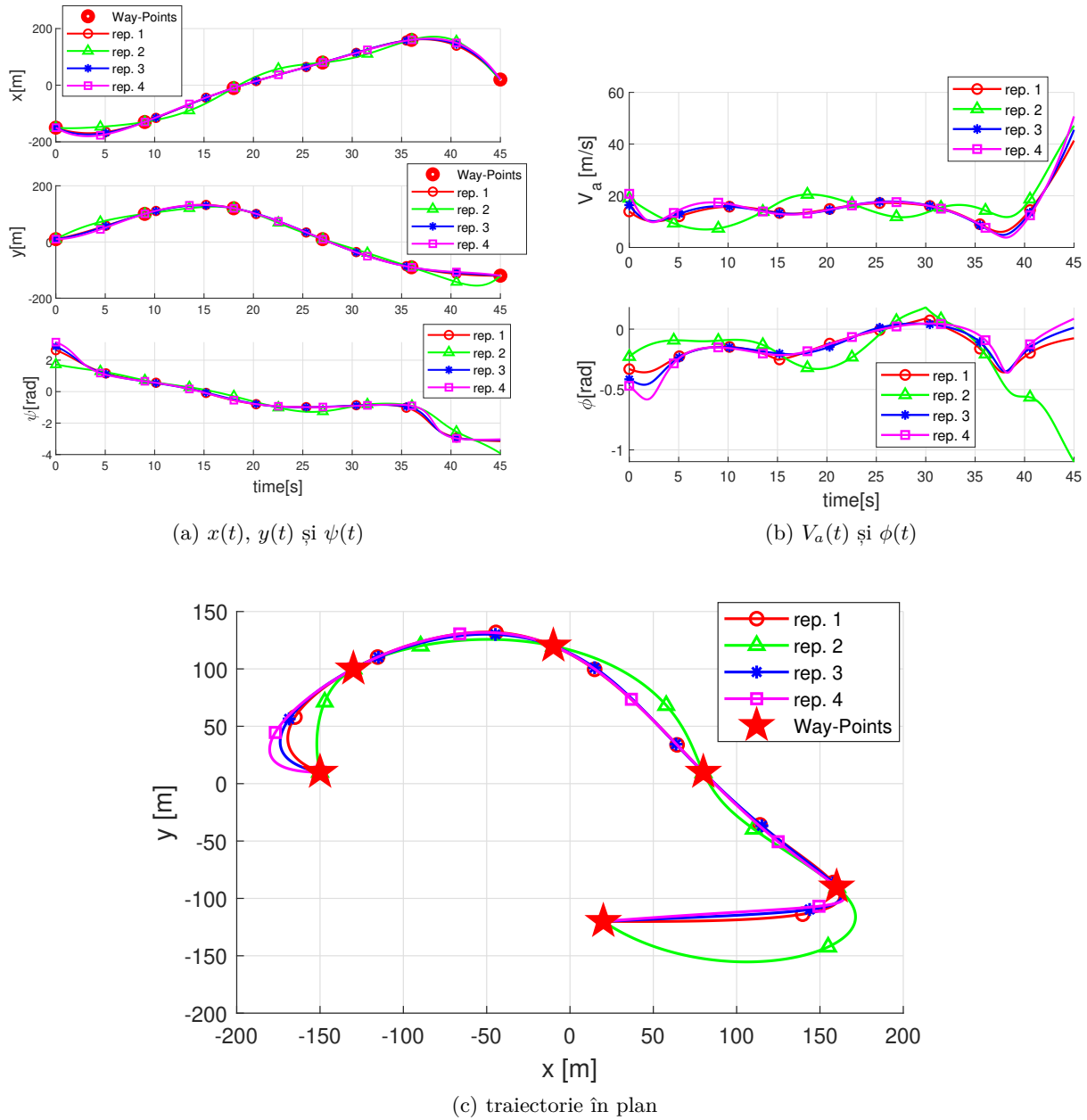


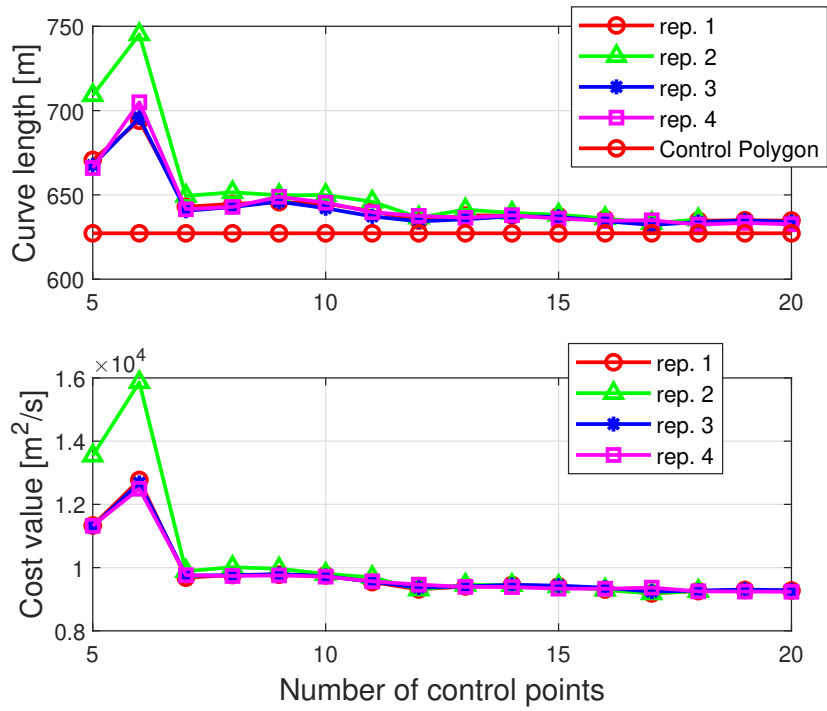
Figura 1: Analiză comparativă pentru reprezentări prin cele 4 ieșiri plate

Tabela 3: Eroare de urmărire cu diferite scenarii de vânt

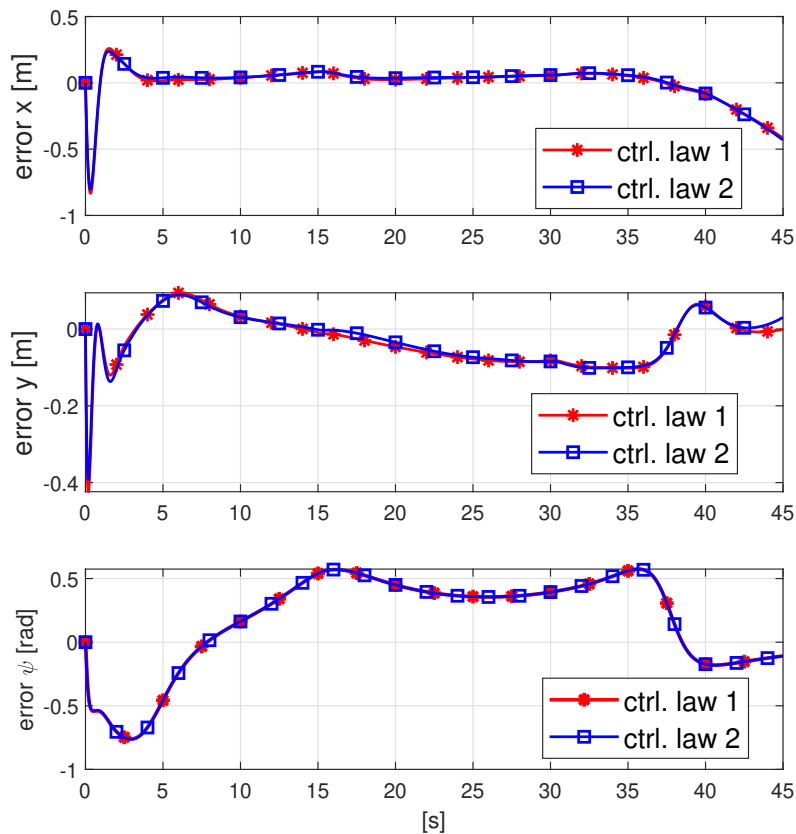
RMS(\cdot)[m]	e_{x1}	e_{x2}	e_{y1}	e_{y2}
W[m/s]				
[+5;+5]	0.0869	0.1317	0.0588	0.0744
[-5;+5]	0.0675	0.1301	0.1079	0.1146
[+5;-5]	2×10^{21}	1×10^{20}	8×10^{20}	3×10^{20}
[-5;-5]	5×10^{18}	0.3008	3×10^{18}	0.1947

2.3 Reprezentări compacte pentru funcții afine pe porțiuni

Acest rezultat propune reprezentări eficiente pentru o largă clasă de suprafețe afine pe porțiuni. În cazul explicitat în continuare, reprezentarea este utilizată pentru a caracteriza eficient un spațiu cu obstacole poliedrale (cu aplicație directă în implementările **Activităților 2.1** și **2.2**). Noțiunea poate fi extinsă pentru o suprafață afină pe porțiuni generică.



(a) lungimea curbelor și valorile funcției obiectiv



(b) eroare de urmărire pentru $x(t)$ și $y(t)$

Figura 2: Variații în procedura de generare a traiectoriei pentru cele 4 reprezentări plate

În particular, am elaborat o suită de algoritmi de planificare a mișcării pentru diverse rețele de agenți, având ca scop evitarea coliziunii dintre agenți și obstacole prezente în mediu, precum și urmărirea unei ținte fixe. Analizăm abordarea generală privind implementarea așa-numitului *câmp potențial*. După cum este recunoscut și în literatura de specialitate (vezi [3]), *câmpul potențial* reprezintă un ansamblu format din două forțe distincte ce pot acționa concomitent asupra unui agent la un moment de timp specific, și anume, o *forță de repulsie* (responsabilă de evitarea coliziunilor dintre agenți și eventuale obstacole existente în mediu) și o *forță de atracție* (care atrage agentul către o țintă fixă, stabilită a priori). Un *aranjament de hiperplane* este descris [13] pornind de la noțiunea de hiperplan:

$$H_k = \{x \in \mathbb{R}^n | a_k^\top x = b_k\}, \quad (27)$$

unde $a_k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ și $b_k \in \mathbb{R}$. Un astfel de hiperplan împarte mediul în *două spații disjuncte*:

$$H_k^+ = \{x \in \mathbb{R}^n | a_k^\top x \leq b_k\}, \quad H_k^- = \{x \in \mathbb{R}^n | -a_k^\top x \leq -b_k\}. \quad (28)$$

H_k^+ evidențiază în mod convențional regiunea situată în partea dreaptă a hiperplanului respectiv, iar H_k^- face referire la partea stângă a aceluși hiperplan. Astfel, se obține partiționarea spațiului în celule disjuncte, atât fezabile (notate Σ°) cât și interzise (i.e. obstacolele - notate Σ^\bullet), celule ce vor fi în continuare definite generic prin $A(\sigma)$ (cu $A(\mathbb{H}_k) := \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \mathcal{A}(\sigma)$), unde σ reprezintă un tuplu ce conține o combinație de semne specifică pentru fiecare celulă în parte, prin care este descrisă poziția acesteia prin raportare la fiecare hiperplan H_k existent în mediu (v. fig. 3).

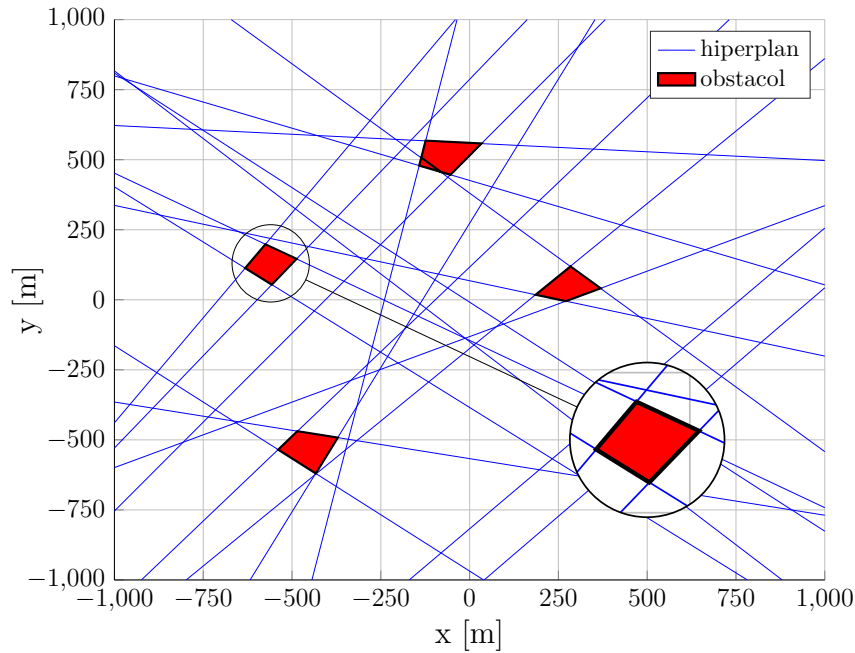


Figura 3: Aranjament de hiperplane ce descrie obstacole fixe

Revenind la implementarea *câmpului potențial*, *forța de repulsie* a fost construită prin utilizarea unei *funcții fracționare* care primește ca argument o așa-numită *funcție sumă*. După cum este descris și în [12], această *funcție fracționară* descrie efectul câmpului potențial repulsiv asupra agentului, în funcție de poziția sa față de obstacolele prezente în mediu. Mai precis, aceasta are valoarea maximă în interiorul regiunii infeasibile (ce descrie un obstacol), respectiv o valoare ce tinde asimptotic către 0 pe măsură ce agentul se depărtează de obstacole:

$$P(\gamma(x)) = \frac{\phi_1}{(\phi_2 + \gamma(x))^2}, \quad (29)$$

unde $\gamma(x)$ descrie funcția sumă liniară pe porțiuni introdusă în [12]:

$$\gamma(x) = \sum_{k=1}^{n_h} (a_k x - b_k + |a_k x - b_k|). \quad (30)$$

Analizând (30), se observă că în situația în care agentul se regăsește într-o regiune interzisă ce descrie un obstacol (adică $\pm a_k x \leq \pm b_k$), atunci $\gamma(x) = 0$; altfel, $\gamma(x) = 2 \sum_{k: a_k^\top x > b_k} (a_k^\top x - b_k)$.

Ținând cont totodată și de notația $A(\sigma)$, cu $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ și $\sigma_k = \pm$, putem generaliza (30), astfel încât să acoperim întreg suportul poliedral generat de totalitatea hiperplanelor H_k existente, nu doar de cele care descriu un singur obstacol:

$$\gamma^\bullet(x) = 2 \sum_{k: (2\sigma_k^\bullet - 1)a_k^\top x \geq (2\sigma_k^\bullet - 1)b_k} (2\sigma_k^\bullet - 1) \cdot (a_k^\top x - b_k), \quad (31)$$

unde $\sigma_k^\bullet = \{0, 1\}$, astfel încât să menținem echivalența ' \pm ' = ± 1 . Pentru a extinde (31) pentru cazul multi-obstacol, am recurs la utilizarea operatorului 'min' pentru a defini funcția sumă globală:

$$\gamma(x) = \min_{\sigma^\bullet, i \in \Sigma^\bullet} \gamma^{\bullet, i}(x) = \min_{\sigma^\bullet, i \in \Sigma^\bullet} 2 \sum_{k: \sigma_k^{\bullet, i} \neq \sigma_k^j} (2\sigma_k^{\bullet, i} - 1) \cdot (a_k^\top x - b_k), \quad \forall x \in \mathcal{A}(\sigma^j). \quad (32)$$

Aceasta va fi ulterior utilizată ca argument în interiorul funcției fracționare, fiind astfel obținută componenta repulsivă $P(\gamma(x))$, definită în (29).

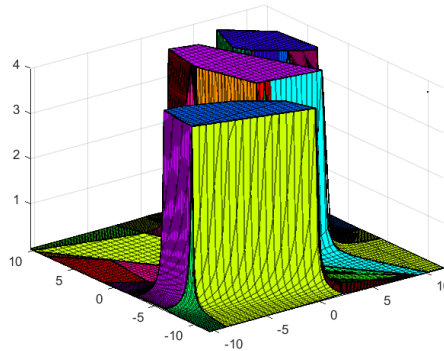
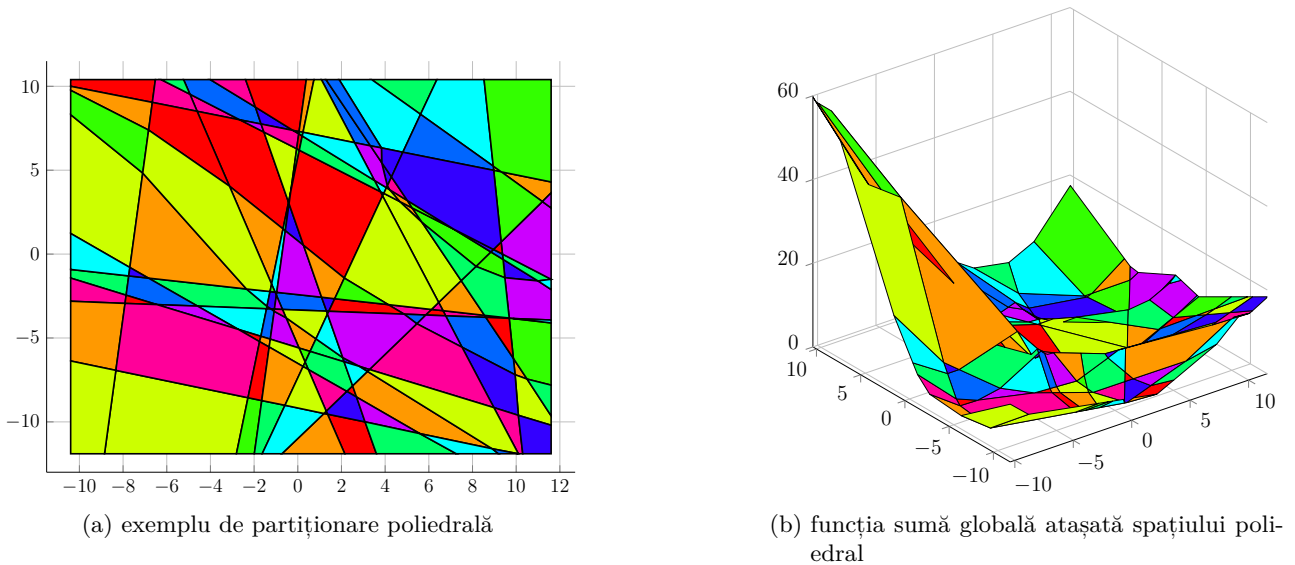


Figura 4: Câmp potențial repulsiv indus de funcția sumă globală definită în (29)

Câmpul potențial repulsiv astfel obținut este integrat într-o problemă de optimizare de forma MPC

(reglare predictivă cu constrângeri). În acest caz, am considerat inițial un *sistem liniar și invariant în timp*, de forma:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad y_k = Cx_k, \quad (33)$$

unde $x \in \mathbb{R}^n$ este vectorul de stare, $u \in \mathbb{R}^m$ reprezintă comanda aplicată sistemului, $y \in \mathbb{R}^p$ semnalul de ieșire, iar $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, matricile de stare asociate.

Plecând de la un model de control predictiv clasic (ce presupune existența unui cost quadratic, respectiv a unor constrângeri liniare), am adaptat pentru sistemul evidențiat în (33), ajungând în final la definirea următoarei probleme de optimizare:

$$\mathbf{u}_N^* = \underset{\mathbf{u}_N}{\operatorname{argmin}} \|x_N\|_S^2 + \sum_{k=0}^{N-1} (\|x_k\|_Q^2 + \|\Delta u_k\|_R^2) + P(\gamma(y_k)), \quad (34a)$$

$$\text{s.t. } x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (34b)$$

$$y_k = Cx_k, \quad (34c)$$

$$x_k \in \mathcal{X}, u_k \in \mathcal{U}, y_k \in \mathcal{Y}, \quad (34d)$$

pentru $k \in \{0, \dots, N-1\}$.

Datorită termenului neliniar $P(\gamma(x))$, pentru a rezolva (42) este necesară reprezentarea într-o manieră care să poată fi recunoscută de către un solver. Din acest motiv, am considerat că utilizarea reprezentărilor folosind *programarea cu variabile mixte (MIP)* servește cel mai bine scopul dorit.

Astfel, au rezultat 4 metode principale de utilizare, fiecare metodă generând o reprezentare unică, ce va fi detaliată în cele ce urmează. Dintre aceste metode, amintim:

- M1) extragerea reprezentărilor PWA bazate pe vârfuri pentru fiecare funcție sumă individuală $\gamma^{\bullet,i}(y_k)$, urmată de implementarea selecției folosind operatorul 'min', și aplicarea funcției potențiale $P(\gamma(y_k))$;
- M2) extragerea reprezentărilor PWA bazate pe vârfuri pentru fiecare funcție sumă individuală $\gamma^{\bullet,i}(y_k)$, urmată de aplicarea funcției potențiale pentru fiecare dintre aceste funcții, și implementarea selecției folosind operatorul 'max';
- M3) extragerea reprezentărilor PWA bazate pe vârfuri pentru funcția sumă globală și aplicarea MIP prin raportare la vârfurile v_j extrase, precum și la funcțiile $\gamma(v_j)$;
- M4) utilizarea reprezentărilor PWA bazate pe aranjamentul de hiperplane pentru funcția sumă globală.

Astfel, vom detalia în continuare tipurile de reprezentări *MI*, pentru fiecare din scenariile de lucru enunțate în paragraful anterior, și vom începe prin definirea operatorilor 'min' și 'max'.

Conform ([10]), reprezentările *mixed-integer* pentru $\underline{\gamma} = \min\{\gamma(x_1), \dots, \gamma(x_n)\}$ și $\bar{\gamma} = \max\{\gamma_1(x_1), \dots, \gamma_n(x_n)\}$ sunt exprimate prin:

$$\gamma_i(x_i) - M(1 - z_i) \leq \underline{\gamma} \leq \gamma_i(x_i), \quad (35a)$$

$$\gamma_i(x_i) \leq \bar{\gamma} \leq \gamma_i(x_i) + M(1 - z_i), \quad (35b)$$

$$z_1 + \dots + z_n = 1, \quad (35c)$$

pentru $z_i \in \{0, 1\}$ și $\forall i = 1 \dots n$.

Aici este vizibilă o abordare de tip "big-M". Datorită condiției impuse prin (35c), doar o singură variabilă binară z_i are valoarea '1', moment la care inegalitatea (35a) devine $\gamma_i(x_i) \leq \underline{\gamma} \leq \gamma_i(x_i)$; implicit, pentru restul variabilelor binare, aceeași inegalitate va deveni $\underline{\gamma} \leq \gamma_i(x_i)$. O abordare similară se regăsește și în cazul operatorului 'max', fiind utilizate relațiile (35b) și (35c).

Mai departe vom analiza metoda de obținere a reprezentării *MI bazată pe vârfuri* (vezi [10]). În primul rând, considerăm o funcție PWA cu suport de-a lungul întregului aranjament poliedral, $f(x) : \mathbb{R}^n \mapsto R$, unde vârfurile tuturor regiunilor R_i sunt stocate în $\mathbb{V} = \{v_j\}_{j=1 \dots m}$. Definind această funcție

PWA, putem apoi exprima așa-numitul *epigraf al funcției* $f(x)$, unde $f(x) \leq t$, impunând simultan următoarele condiții de descriere a regiunilor active, bazată pe vârfuri:

$$x = \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j, \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j f(v_j) \leq t, \quad (36a)$$

$$\alpha_j \geq 0, \forall j = 1 \dots m, \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j = 1, \quad (36b)$$

$$\alpha_j \leq \sum_{i: v_j \in R_i} z_i, \quad \sum_{j=1}^n z_j = 1, \quad (36c)$$

pentru $z \in \{0, 1\}^n$.

Nu în ultimul rând, vom descrie și suportul matematic al reprezentării utilizate în scenariul M4), și anume *reprezentarea PWA bazată pe aranjamentul de hiperplane*. Această metodă implică de asemenea utilizarea *epigrafului funcției* $f(x)$, folosit ca și constrângere asupra valorii potențialului introdus în costul problemei de optimizare.

Diferența majoră comparativ cu abordările anterioare este reprezentată de rescrierea relațiilor (35a) și (35b) astfel încât suportul de hiperplane asociat mediului să fie luat în calcul. Astfel, obținem noile relații:

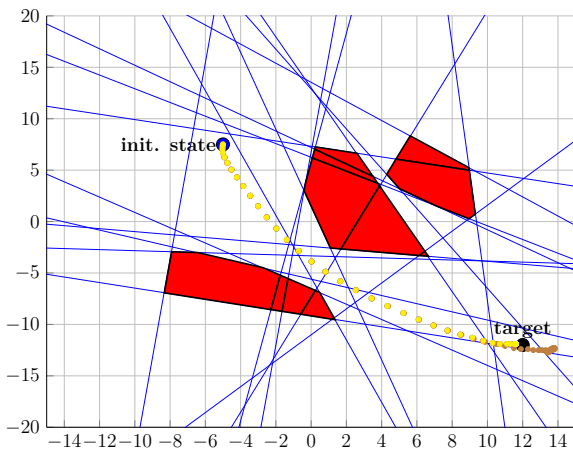
$$a_k \top x \leq b_k + M(1 - \sigma_k), \quad (37a)$$

$$-a_k \top x \leq -b_k + M\sigma_k, \quad (37b)$$

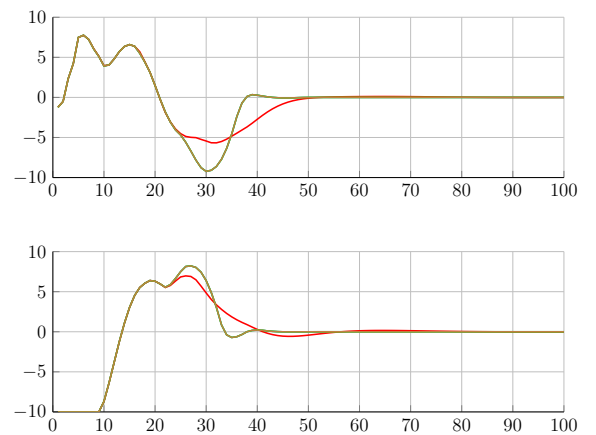
$$f(x) - M \sum_{k=1}^n \sigma_k^i + (2\sigma_k^i - 1)\sigma_k \leq t, \forall \sigma^i \in \Sigma, \quad (37c)$$

unde σ_k a fost definit anterior; de asemenea, echivalențele de semn utilizate în acest context sunt ‘-’ = ‘0’ and ‘+’ = ‘1’.

Fiind enunțate toate aceste abordări teoretice, vom ilustra mai jos și rezultatele obținute în simulare, pentru toate cele 4 metode descrise anterior (M1) - M4)), după cum urmează: plecând de la dinamica enunțată în 42, considerăm matricile discrete $A = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & T \cdot \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \cdot \mathbf{I} \\ T \cdot \mathbf{I} \end{bmatrix}$, $C = [\mathbf{I} \ \mathbf{0}]$, orizontul de predicție al MPC $N = 15$, respectiv matricile de penalizare $Q = \text{diag}\{\mathbf{I}, \mathbf{0}\}$, $R = \mathbf{I}$, $S = 100 \cdot Q$. \mathbf{I} . Agentul pleacă din $x_o = [-5 \ 7.5]^\top$ și ajunge în $x_f = [10 \ -10]^\top$. Rezultatele pot fi observate în Fig. 5a și 5b



(a) traiectoriile agentului pentru M1)-M4)



(b) Secvența de comenzi pentru M1)-M4)

Figura 5: Ilustrații comportament agent pentru implementări MI echivalente

metodă	# variabile binare	CPU time	lungime traiectorie
M1)	915+45+30	58.00	27.08
M2)	915+45+90	69.87	27.08
M3)	1215+30	115.40	27.08
M4)	720+30	92.93	29.98

Tabela 4: Caracteristici de modelare și rezultatele obținute în simulare

Odată obținute aceste rezultate, ele au fost extinse ulterior, astfel fiind create concomitent scenarii de reprezentare cu variabile mixte nu doar pentru cazul utilizării partiționării de tip *half-space*, cât și a reprezentărilor de tip *vertex-based*. În cazul reprezentărilor de tip *vertex-based*, noutățile specifice de implementare ce pot fi amintite sunt:

1. exploatarea suportului poliedral comun al funcțiilor sumă individuale $\gamma^{\bullet,i}(x)$, descrise în (32) și scrierea unei reprezentări compacte prin variabile mixte;
2. rescrierea, de data aceasta în formă extinsă, a reprezentării prin variabile-mixte de tip *vertex-based* pentru funcția sumă globală evidențiată în (32); atât în acest scenariu, cât și în cel anterior, fiind utilizată o codificare logaritmică pentru aproximarea afină pe porțiuni a potențialului repulsiv;
3. realizarea unui algoritm implicit prin intermediul căruia să poată fi reprezentată în mod direct suprafața afină pe porțiuni a câmpului potențial poliedral.

Astfel, **metoda 1** este descrisă în mod formal și detaliat prin următoarele ecuații:

$$x = \sum_{\ell=1}^M \alpha_{\ell} v_{\ell}, \quad (38a)$$

$$\sum_{\ell=1}^M \alpha_{\ell} \gamma^{\bullet,i}(v_{\ell}) \leq t^i, \forall i = 1 \dots T, \quad (38b)$$

$$\alpha_{\ell} \geq 0, \forall \ell = 1 \dots M, \quad \sum_{\ell=1}^M \alpha_{\ell} = 1, \quad (38c)$$

$$\alpha_{\ell} \leq \sum_{j: v_{\ell} \in \mathcal{A}(\sigma^j)} z_j, \quad \sum_{j=1}^S z_j = 1, \quad (38d)$$

$$t^i - M(1 - z_i) \leq \underline{t} \leq t^i, \forall i = 1 \dots T, \quad (38e)$$

$$z_1 + \dots + z_T = 1, \quad (38f)$$

$$\underline{t} = \sum_{r=1}^R \alpha_r^P w_r, \quad \sum_{r=1}^R \alpha_r^P P_r \leq t^P \quad (38g)$$

$$\sum_{r=1}^R \alpha_r^P = 1, \quad \alpha_r^P \geq 0, \forall r = 1 : R, \quad (38h)$$

$$\alpha_r^P + \alpha_{r+1}^P \leq \sum_{b=1}^{\lceil \log_2 R \rceil} r'_b + (1 - 2r'_b) z_b^P, \forall r' \neq r, \quad (38i)$$

$$\forall r = 1 : R - 1,$$

$$\sum_{b=1}^{\lceil \log_2 R \rceil} 2^{b-1} z_b^P \leq R. \quad (38j)$$

Toate ecuațiile și inegalitățile prezente în ansamblul de relații 38a - 38j au o semnificație cât se poate de concretă raportată la scopul reprezentării în sine. Mai precis:

- setul de relații 38a - 38c exprimă poziția agentului în funcție de vârfurile regiunii în care se regăsește, precum și funcția sumă aferentă;
- 38d introduce perechea de condiții care forțează în mod explicit activarea regiunii parcurse de agent (prin intermediul variabilelor binare z_j), fiind utilizate exclusiv vârfurile ce descriu regiunea în cauză;
- 38e - 38f indică aplicarea operatorului 'min' pentru determinarea valorii minime dintre toate funcțiile sumă calculate pentru fiecare obstacol în parte în mod individual ($z_j = 1 \iff \gamma_{min}(x) = \gamma^{\bullet,j}(x)$ și $\{z_1 + \dots + z_T\} \setminus z_j = 0$).
- 38g - 38h sunt relațiile responsabile de descrierea funcției potențiale repulsive după aplicarea procedurii de liniarizare pe porțiuni (liniarizarea fiind efectuată pe un număr specific de R intervale);
- 38i - 38j sugerează activarea porțiunii liniarizate aferente poziției agentului la momentul respectiv.

Metoda 2 este desfășurată din punct de vedere matematic astfel:

$$x = \sum_{\ell=1}^{\tilde{M}} \alpha_{\ell} \tilde{v}_{\ell}, \quad \sum_{\ell=1}^{\tilde{M}} \alpha_{\ell} \gamma(\tilde{v}_{\ell}) \leq t, \quad (39a)$$

$$\alpha_{\ell} \geq 0, \quad \forall \ell = 1 \dots \tilde{M}, \quad \sum_{\ell=1}^{\tilde{M}} \alpha_{\ell} = 1, \quad (39b)$$

$$\alpha_{\ell} \leq \sum_{j: \tilde{v}_{\ell} \in \mathcal{A}(\tilde{\sigma}^m, j)} z_j, \quad \sum_{j=1}^{\tilde{S}} z_j = 1, \quad (39c)$$

$$t = \sum_{r=1}^R \alpha_r^P w_r, \quad \sum_{r=1}^R \alpha_r^P P_r \leq t^P \quad (39d)$$

$$\sum_{r=1}^R \alpha_r^P = 1, \quad \alpha_r^P \geq 0, \quad \forall r = 1 : R, \quad (39e)$$

$$\alpha_r^P + \alpha_{r+1}^P \leq \sum_{b=1}^{\lceil \log_2 R \rceil} r'_b + (1 - 2r'_b) z_b^P, \quad r' \neq r, \quad (39f)$$

$$\forall r = 1 : R - 1,$$

$$\sum_{b=1}^{\lceil \log_2 R \rceil} 2^{b-1} z_b^P \leq R. \quad (39g)$$

Relațiile asociate **metodei 2** sunt similare cu cele pentru **metoda 1**, fiind remarcată însă o diferență notabilă, datorată specificului abordării, și anume, utilizarea funcției sumă globale $\gamma(x)$ (în locul celei locale $\gamma^{\bullet,i}(x)$). Din acest motiv, nu mai este necesară aplicarea operatorului 'min', procedură introdusă inițial în cadrul condițiilor 38e - 38f;

Metoda 3 implică o procedură oarecum similară primelor două metode, însă există totuși o diferență notabilă. Mai concret, în cadrul primelor două metode, o parte din operațiuni se desfășoară în afara problemei de optimizare definite (i.e. calcului funcției sumă individuale sau globale, selecția minimului sau maximului, și așa mai departe), urmând ca elementul pre-calculat să fie introdus în problema de optimizare în vederea efectuării unor operațiuni adiționale (exemplu: liniarizarea funcției repulsive). În cea de-a 3-a metodă însă, absolut toate operațiunile de determinare a componentei repulsive de câmp potențial (aici fiind inclusă și procedura de liniarizare pe porțiuni) se încearcă a fi realizate în afara obiectivului de optimizare, în interiorul acestuia fiind introdusă componenta potențială repulsivă gata obținută.

Un alt aspect deosebit de important de menționat este faptul că indiferent de metoda aleasă spre

utilizare, termenul potențial repulsiv adăugat în interiorul problemei de tip MPC este unul *neliniar*, fapt ce duce în mod implicit la definirea unei probleme de natură *neliniară (de tip MINLP-MPC)*. Acest aspect este într-adevăr important de scos în evidență, întrucât, de regulă, problememe de optimizare neliniare se dovedesc a fi nespuse de dificil de rezolvat chiar și pentru solvere specializate (a se vedea [8], [5]). În mod evident, scrierea termenului în formă neliniară nu poate fi evitată, iar tocmai de aceea, apare o întrebare firească, și anume, cum s-ar putea rezolva cât mai eficient o asemenea problemă. Soluția cea mai potrivită (considerată până la acest moment) constă în efectuarea unei *liniarizări pe porțiuni*.

O liniarizare pe porțiuni presupune în termeni cât mai simpli o exprimare geometrică la baza căreia stă o aproximare a unei curbe printr-o secvență de segmente. Luând ca exemplu concret funcția potențială repulsivă introdusă prin relația 29, se poate afirma că liniarizarea va duce la reconstrucția curbei asociate cu funcția respectivă, printr-o serie de segmente obținute ca urmare a unirii a câte 2 puncte succesive situate pe curba cu pricina. Astfel, plecând de la raționamentul prezentat, se pot defini din punct de vedere matematic, pe rând (și în această ordine), punctele ce reprezintă capetele fiecărui segment proaspăt obținut (și implicit valoarea funcției sumă asociată), precum și valoarea câmpului potențial repulsiv în punctele respective:

$$\gamma(x) = \lambda\gamma(x_i) + (1 - \lambda)\gamma(x_{i+1}), i = 1 \dots n, \quad (40)$$

$$P(\gamma(x)) = \lambda P(\gamma(x_i)) + (1 - \lambda)P(\gamma(x_{i+1})), \quad (41)$$

unde $\gamma(x_i) \in \mathbb{R}$, cu $\gamma(x_i) = \{0, 1, 2.34, 5.47, 12.82, 30\}$. O interpretare geometrică a liniarizării este evidențiată mai jos:

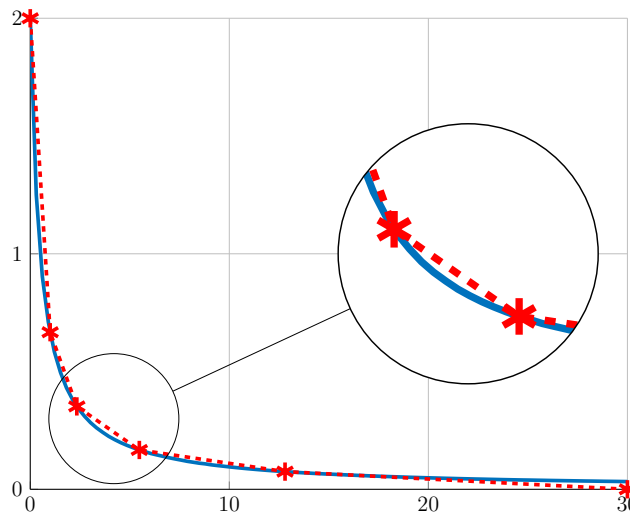


Figura 6: Termen potențial repulsiv $P(\gamma(x))$ liniarizat pe porțiuni

În cele din urmă, am obținut în simulare o serie de rezultate extinse pentru fiecare din cele 3 metode, acestea fiind comparate totodată cu metodele M1) și M4) (R4) și R5) în tabelul definit mai jos):

repr.	# regiuni	# vârfuri	# variabile continue	# variabile binare	lungime traiectorie	CPU time
R1)	117	89	2369	1845	27.11	268.62
R2)	81	115	1949	1260	27.11	119.26
R3)	261	260	4019	3930	25.69	417.89
R4)	61	89	1934	990	27.08	58.00
R5)	262	260	209	750	29.98	92.93

Tabela 5: Caracteristici de modelare și rezultatele aferente obținute în simulare

2.4 Sinteza unor legi de reglare complexe

Metodele descrise în următoarele două secțiuni tratează abordări în frecvență și realizare pe stare pentru sisteme liniare cu aplicație directă către obiectivul **Activității 2.3**, în sensul că eroarea de urmărire a unei referințe este asimilată unei neconcordanțe între timpul de simulare și cel *virtual* asociat evoluției de-a lungul referinței. Merită de asemenea menționat că deși dinamica sistemelor considerate este adesea neliniară, prin inversarea de model discutată în prima secțiune se ajunge la sisteme în buclă închisă, liniare.

2.4.1 Strategii de reglare în sens \mathcal{H}_2

Una din problemele centrale ale reglării moderne o constituie reglarea în sens \mathcal{H}_2 , care constituie echivalentul determinist al reglării optimale în sens Gaussian (Linear Quadratic Gaussian control). Fundamental, această problemă se reduce la minimizarea, peste mulțimea de regulatoare intern stabilizatoare, a normei Hardy-2 pentru transferul de la vectorul de semnale u_1 la vectorul y_1 , aa cum este pus în evidență în cadrul Figurii 7.

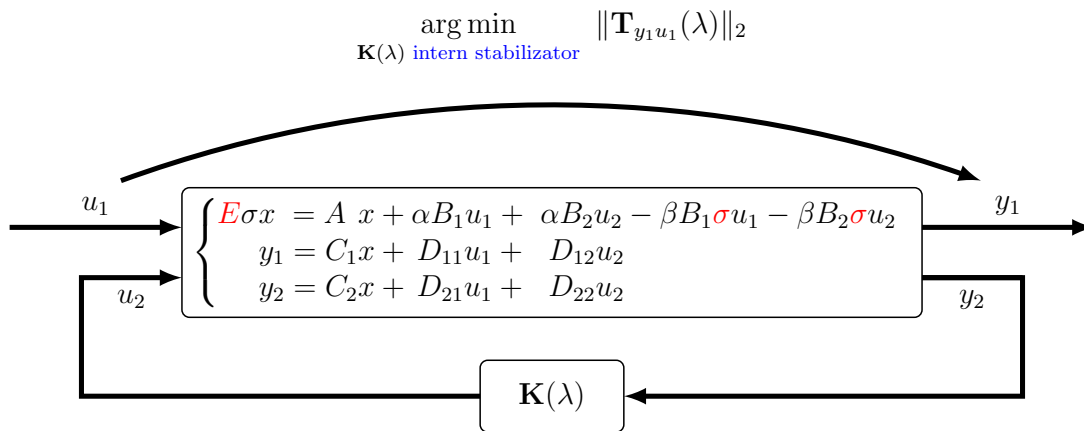


Figura 7: Schemă generalizată de reglare

În cadrul cercetării efectuate, s-a considerat cea mai generală clasă de sisteme liniare și invariante în timp, modelate cu ajutorul unor realizări de tip Rosenbrock particulare, numite realizări centrate. Principala dificultate asociată cu acest tip de sisteme, intitulate algebrico-dinamice, o constituie chiar partea algebrică, dată de singularitatea matricei (pătrate) E din ecuațiile de stare prezentate în Figura 7. Mai mult, cazul considerat este independent de domeniul de timp în care se modelează procesul ce se dorește reglat în sens \mathcal{H}_2 , de unde apariția operatorului $\sigma(\cdot)$ care semnifică derivarea în raport cu timpul (în cazul sistemelor de timp continuu), sau avansul în timp cu o unitate (în cazul celor de timp discret). De asemenea, variabila complexă λ asimilează variabilele s și z , aferente transformărilor Laplace și \mathcal{Z} , din domeniile de timp respective.

Principala inovație a acestui demers o constituie utilizarea mapărilor conforme și bijective a planului complex extins, de tipul

$$f: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad f(\lambda) := \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Prin alegerea judicioasă celor patru scalari complecși ce definesc maparea, problema generalizată din Figura 7 se reduce la una standard, descrisă de ecuații clasice, pe spațiul stărilor în timp continuu, și pentru care există proceduri numerice mai eficiente (din punct de vedere computațional) decât cele care deservește reprezentările mai generale din Figura 7.

Soluția din timp continuu este una bine cunoscută din teoria funcțiilor matriceale raționale și se reduce la rezolvarea unei probleme de minimizare de normă a sistemului

$$\mathbf{T}_{y_1 u_1}(s) = \mathbf{T}_1(s) + \mathbf{T}_2(s)\mathbf{Q}(s)\mathbf{T}_3(s),$$

care este exprimat în mod afină ca funcție de o matrice rațională stabilă $\mathbf{Q}(s)$, ce servește drept termen liber al celebratei parametrizării Youla pentru regulatoare stabilizatoare. Sub anumite ipoteze de regularitate, soluția optimă este dată de

$$\mathbf{Q}(s) = -\mathbf{T}_{2o}^{-1}(s) [\mathbf{T}_{2i}^*(s)\mathbf{T}_1(s)\mathbf{T}_{3ci}^*(s)]_+ \mathbf{T}_{3co}^{-1}(s),$$

unde $[\cdot]_+$ semnifică partea stabilă a unei matrice raționale, iar $(\cdot)^*$ denotă adjuncta. În plus, termenii $\mathbf{T}_{2i}(s)$ și $\mathbf{T}_{2o}(s)$ definesc o factorizare inner-outer a lui $\mathbf{T}_2(s)$, în timp ce $\mathbf{T}_{3ci}(s)$ și $\mathbf{T}_{3co}(s)$ definesc o factorizare co-inner-outer a lui $\mathbf{T}_3(s)$.

În urma folosirii tehnicii bazate pe mapări conforme, s-a obținut o procedură numerică de până la 8 ori mai eficientă decât alte tehnici comparabile din literatura de specialitate, iar eficiența a fost demonstrată pentru un exemplu numeric pentru care obținerea regulatorului optimal s-a făcut cu un cost computațional de 5 ori mai scăzut decât cu ajutorul procedurii prezentate în [14]. În plus, s-au furnizat formulări bazate pe realizări centrate pentru parametrizarea Youla și pentru factorizările (co-)inner-outer și s-a aratat ca, atunci când regulatorul optimal este impropriu, orice regulator suboptimal ce păstrează norma \mathcal{H}_2 finită va trebui să fie de asemenea impropriu.

Soluția din timp discret este semnificativ mai elaborată și presupune rezolvarea unei probleme echivalente din timp continuu, ce se obține prin scalarea corespunzătoare a sistemului generalizat pentru care s-a aplicat o mapare conformă de tipul celei amintite anterior. Dacă $\mathbf{H}(z)$ este procesul generalizat al problemei iar $\tilde{\mathbf{H}}(s) := \mathbf{H}(f(s))$ este cel transformat, atunci se formează

$$\check{\mathbf{H}}_\varphi(s) := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{s+1}I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_{11}(s) & \tilde{\mathbf{H}}_{12}(s) \\ \tilde{\mathbf{H}}_{21}(s) & \tilde{\mathbf{H}}_{22}(s) - \tilde{\mathbf{H}}_{22}(\infty) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (s - \varphi)I \end{bmatrix}$$

pentru orice φ cu partea reală strict negativă și care nu este valoare proprie a fasciculului de poli al lui $\tilde{\mathbf{H}}(s)$. Sub anumite ipoteze de regularitate, această problemă are o soluție ce se poate exprima prin rezolvarea a două ecuații matriceale algebrice Riccati și care constă într-un regulator optimal $\tilde{\mathbf{K}}_\varphi(s)$. Regulatorul căutat pentru problema originală va fi dat de

$$\mathbf{K}(z) = \frac{1}{f^{-1}(z) - \varphi} \tilde{\mathbf{K}}_\varphi(f^{-1}(z)) \left(I - \tilde{\mathbf{H}}_{22}(\infty) \frac{1}{f^{-1}(z) - \varphi} \tilde{\mathbf{K}}_\varphi(f^{-1}(z)) \right)^{-1},$$

pentru oricare φ ales în maniera anterior precizată. Mai mult, parametrizarea lui Youla poate fi folosită pentru a produce un regulator suboptimal (arbitrar de aproape de cel optimal) și propriu, atunci când raționala $\left(I - \tilde{\mathbf{H}}_{22}(\infty) \frac{1}{f^{-1}(z) - \varphi} \tilde{\mathbf{K}}_\varphi(f^{-1}(z)) \right)$ nu are rang întreg pentru $z \rightarrow \infty$. Acest nou regulator garantează implementări cauzale pentru legile de reglare ce se obțin.

Drept urmare a acestei noi tehnici, s-a produs un regulator stabilizator ce asigură o norma \mathcal{H}_2 de 2 ori mai mică decât procedura propusă în [7] pentru același exemplu numeric. În plus, s-a clarificat formula pentru valoarea normei \mathcal{H}_2 , formulată în [16] și asigurată de aceste tipuri de regulatoare, atunci când aceasta se exprimă pe baza soluțiilor celor două ecuații Riccati amintite anterior.

2.4.2 Analiza complexității pentru formularea MPC explicită

Am analizat problema tipică MPC (model liniar, cost quadratic, constrângeri liniare):

$$\mathbf{u}_N^* = \arg \min_{\mathbf{u}_N} x_N^\top S x_N + \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_k^\top Q x_k + u_k^\top R u_k \right), \quad (42a)$$

$$\text{s.t. } x_{k+1} = A x_k + B u_k, \quad (42b)$$

$$y_k = C x_k, \quad (42c)$$

$$x_k \in \mathcal{X}, u_k \in \mathcal{U}, y_k \in \mathcal{Y}, x_N \in \mathcal{X}_f, \quad (42d)$$

și am arătat că atunci când (așa cum de fapt este de obicei cazul) constrângerile se pot scrie într-o formă zonotopică, se ajuge la o expresie compactă a cărei rescrie în formă duală (bazată pe condițiile

necesare de optimalitate KKT.

$$\text{staționaritate: } H\mathbf{u}_N^* + F^\top x_0 + \sum_i V^{i\top} \mu^i = 0, \quad (43a)$$

$$(\lambda^{i,+} - \lambda^{i,-}) - G^{i\top} \mu^i = 0, \quad (43b)$$

$$\text{fezabilitate primală: } T^i x_0 + V^i \mathbf{u}_N^* = c^i + G^i \gamma^{i,*}, \quad (43c)$$

$$|\gamma^{i,*}| \leq \mathbf{1}, \quad (43d)$$

$$\text{fezabilitate duală: } \lambda^{i,\pm} \geq 0, \quad (43e)$$

$$\text{complementaritate: } \lambda^{i,\pm} \times (\pm \gamma^{i,*} - 1) = 0, \quad (43f)$$

Enumerând toate seturile candidate de indici activi și păstrându-le numai pe cele care corespund regiunilor critice nevide conduce la partiționarea poliedrală a spațiului x_0 din Fig. 8a. Avantajul ilustrat de metoda noastră este că, exploatând structura domeniului fezabil (ca o intersecție de zonotopi), ne permite să reducem spațiul de căutare și, prin urmare, să reducem numărul de seturi candidat (v. fig. 8b unde sunt ilustrate limite pentru abordarea poliedrală – roșu, respectiv zonotopică – albastru).

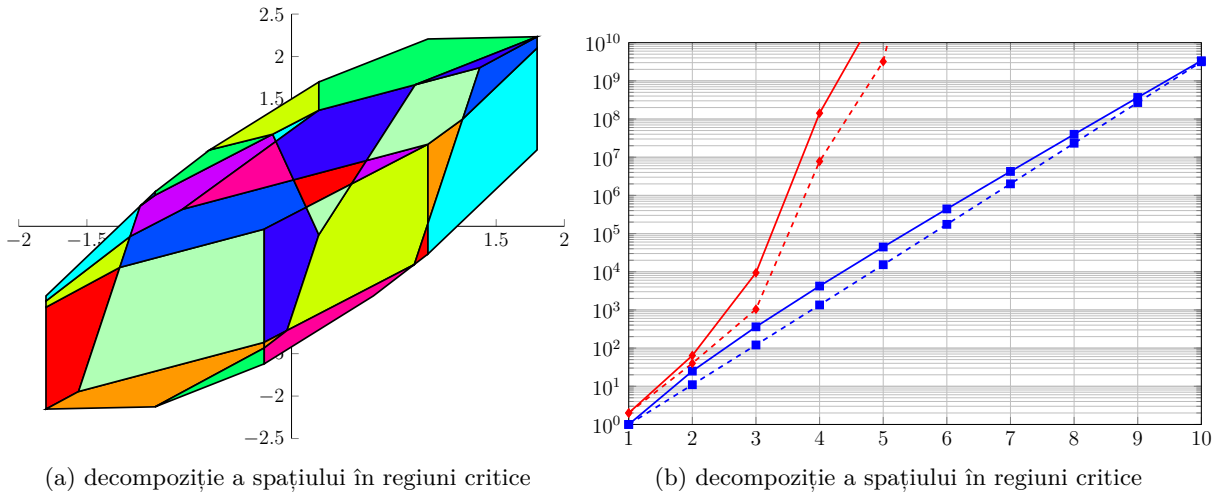


Figura 8: Ilustrații pentru problema MPC explicită

Am arătat că simetriile problemei MPC standard pot fi exploatate pentru a construi eficient soluția “MPC explicită”. Acest lucru se face prin exprimarea domeniului fezabil ca o intersecție a mulțimilor zonotopice. Ulterior, s-a demonstrat că structura combinatorie conduce la o enumerare eficientă a mulțimilor active candidate și admite limite strânse pentru complexitatea reprezentării.

2.5 Validări experimentale

De-a lungul etapelor precedente, prin intermediul articolelor publicate, s-au efectuat în mod constant validări în simulare folosind în principal Matlab dar și, acolo unde a fost cazul elemente de C++, Python (acesta din urmă în mod particular pentru interfațarea cu sistemul ROS/Gazebo).

În această secțiune, ilustrez sintetic unelele folosite pentru validări experimentale. Grafic, acestea sunt ilustrate în Figura 9:

- sistemul de 8 camere Miquis M3 (v. fig. 9a) permite localizarea în coordonate 6D (poziție și atitudine) pentru orice platformă robotică pe care sunt montați marker-i pasivi; eroarea de poziționare este de $< 1\text{mm}$ cu o frecvență de achiziție a datelor de până la 300Hz; sistemul acoperă o regiune $5 \times 5 \times 2.5 \text{ m}^3$;
- platformele folosite au fost cele de sol (un sistem TurtleBot Burger) precum și drone de mici dimensiuni (nano-drona Crazyflie, v. fig. 9b);

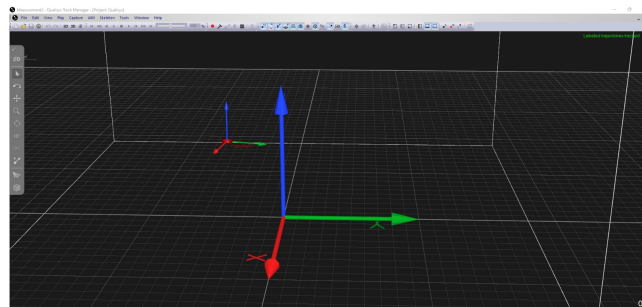
- datele sunt centralizate în programul QTM al Qualisys care permite observarea în timp real a traiectoriilor precum și trimiterea informațiilor (fie în timp real prin stabilirea unui canal de comunicație fie stocarea lor în format json/mat); merită menționat de asemenea că există unelte asociate ce permit interacțiune cu Python (modul default) dar și cu Matlab (conector dedicat).



(a) Miquis M3 camera



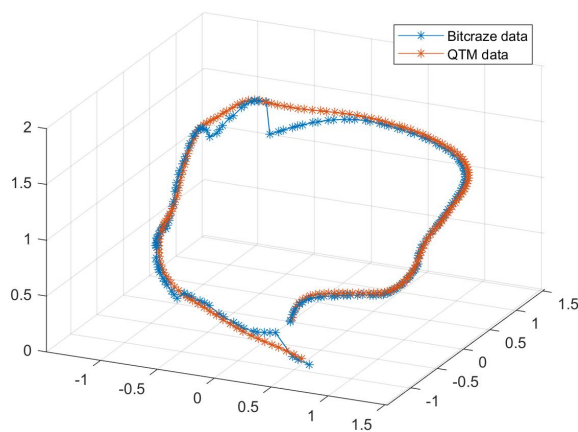
(b) nano-dronă Crazyflie



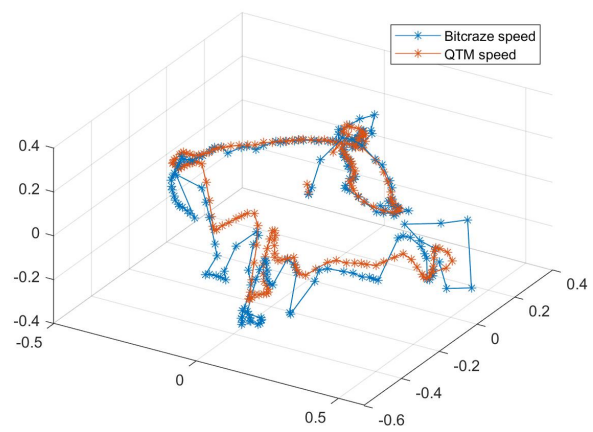
(c) sistem de poziționare QTM

Figura 9: Materiale folosite în cadrul testărilor experimentale

Pentru a demonstra performanțele acestui sistem ilustrăm în Figura 10 componentele de poziție (v. fig. 10a) și viteză (v. fig. 10b) măsurate cu un sistem de precizie moderată (LightHouse, parte a ecosistemului de componente Crazyflie), respectiv măsurate prin QTM și camerele aferente.



(a) componenta poziție



(b) componenta viteză

Figura 10: Ilustrație traiectorie pentru zbor nano-dronă

3 Diseminarea și impactul rezultatelor

Rezultatele obținute de-a lungul proiectului sunt:

- 4 articole publicate în reviste (**3 Q1** și încă unul indexat ISI);
- 8 articole de conferință, indexate sau în curs de indexare ISI/BDI (2 indexate ISI, 4 în curs de indexare ISI, 2 indexate BDI);
- 3 articole depuse (două în reviste Q1 și unul pentru o conferință de top);
- 2 articole în pregătire pentru publicare (ambele în reviste Q1).

3.1 Activități de diseminare

Articole publicate:

- P1) **Ionescu, T. C.**, O. V. Iftime și I. Necoara. “Model reduction with pole-zero placement and high order moment matching”. În: *Automatica*, pag. 110140, **2022**. ISSN: 0005-1098. Elsevier **IF: 6.15**. **Q1-IF** (Automation & Control Systems - 9/63), **Q1-IF** (Engineering, Electrical & Electronic - 31/266). DOI: [10.1016/j.automatica.2021.110140](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.110140). Wos: 000788851300017
- P2) **Sperilă, A.**, C. Oară și **B. D. Ciubotaru**. “H2 Output Feedback Control of Differential-Algebraic Systems”. În: *IEEE Control Systems Letters (L-CSS)*, pag. 542–547, **2021**. ISSN: 2475-1456. DOI: [10.1109/LCSYS.2021.3083399](https://doi.org/10.1109/LCSYS.2021.3083399). Wos: 000668835800008
- P3) **Sperilă, A.**, **B. D. Ciubotaru** și C. Oară. “The optimal H2 controller for generalized discrete-time systems”. În: *Automatica*, pag. 109889, **2021**. ISSN: 0005-1098. Elsevier **IF: 6.15**. **Q1-IF** (Automation & Control Systems - 9/63), **Q1-IF** (Engineering, Electrical & Electronic - 31/266). Wos: 000702835200041
- P4) Ioan, D., I. Prodan, S. Olaru, **F. Stoican** și S.-I. Niculescu. “Mixed-integer programming in motion planning”. În: *Annual Reviews in Control*, **2020**. ISSN: 1367-5788. Elsevier **IF: 4.987**. **Q1-IF** (Automation & Control Systems - 12/63). DOI: [10.1016/j.arcontrol.2020.10.008](https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2020.10.008). Wos: 000664938900006
- P5) **Pătrașcu, M.** și L. A. Vișcoțel. “Design of Stabilizing Predictor-based Controller for Closed Loop Traffic Control with Real-Coded Genetic Algorithms”, pag. 23–28. În: *European Control Conference, Rotterdam, Netherlands*. **2021**. DOI: [10.23919/ECC54610.2021.9654964](https://doi.org/10.23919/ECC54610.2021.9654964). Wos: 000768455200004
- P6) **Pătrașcu, M.** “Smith Predictor Approximation for Industrial Control Applications with Genetic Algorithms”, pag. 1–6. În: *International Conference on Applied Artificial Intelligence (ICAPAI'21)*. **2021**. DOI: [10.1109/ICAPAI49758.2021.9462066](https://doi.org/10.1109/ICAPAI49758.2021.9462066).
- P7) **Stoican, F.** și Ș.-S. Mihai. “Observations on the complexity of the explicit MPC”, pag. 2551–2556. În: *60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'21)*. **2021**. DOI: [10.1109/CDC45484.2021.9683256](https://doi.org/10.1109/CDC45484.2021.9683256). Wos: 000781990302049
- P8) Olaru, S., **F. Stoican** și S. Kheawhom. “Challenges and opportunities for the control of Energy Storage Systems. A focus on the Zinc-Air batteries”, pag. 1–6. În: *IEEE AFRICON*, **2021**. DOI: [10.1109/AFRICON51333.2021.9571020](https://doi.org/10.1109/AFRICON51333.2021.9571020).
- P9) Do Huu, T., I. Prodan și **F. Stoican**. “Analysis of Alternative Flat Representations of a UAV for Trajectory Generation and Tracking”, pag. 58–63. În: *25th International Conference on System Theory, Control and Computing*. **2021**. DOI: [10.1109/ICSTCC52150.2021.9607073](https://doi.org/10.1109/ICSTCC52150.2021.9607073).
- P10) **Stoican, F.**, **T.-G. Nicu** și I. Prodan. “A mixed-integer MPC with polyhedral potential field cost for collision avoidance”, pag. 2039–2045. În: *Proceedings of the American Control Conference (ACC'22)*. **2022 (published, not yet indexed)**.

- P11) Nicu, T.-G., F. Stoican și I. Prodan. “Polyhedral potential field constructions for obstacle avoidance in a receding horizon formulation”, pag. 260–265. În: *Proceedings of the 18th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO'22)*. 2022 (not yet indexed).
- P12) Do Huu, T., F. Nicolau, F. Stoican și I. Prodan. “Tracking control for a flat system under disturbances: a fixed-wing UAV example”, pag. 412–417. În: *Proceedings of the 18th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO'22)*. 2022 (not yet indexed).

Articole trimise:

- P13) Stoican, F., J. Culiță și S. Olaru. “Set-theoretic fault-diagnosis for a real-world two-tank system”. În: *Journal of the Franklin Institute*, 2022 (under review). ISSN: 0016-0032. Elsevier
IF: 4.246. Q1-IF (Mathematics, Interdisciplinary Applications - 13/108).
- P14) Sperilă, A., C. Oară, B. D. Ciubotaru și Ș. Sabău. “Distributed Control of Descriptor Networks: A Convex Procedure for Augmented Sparsity”. În: *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022 (under review). ISSN: 0018-9286. IEEE
IF: 6.549. Q1-IF (Automation & Control Systems - 11/65), Q1-IF (Engineering, Electrical & Electronic - 36/266).
- P15) Nicu, T.-G., F. Stoican și I. Prodan. “Local minima avoidance in a polyhedral potential field motion planning problem”, în: *Proceedings of the 13th European Control Conference (ECC'23)*. 2023 (submitted).

Articole în pregătire:

- P16) Stoican, F., V. Marguet și I. Prodan. “The application of quasi-interpolants for complexity reduction in motion planning”. În: *Automatica*, 2022 (in preparation). ISSN: 0005-1098. Elsevier
IF: 6.15. Q1-IF (Automation & Control Systems - 9/63), Q1-IF (Engineering, Electrical & Electronic - 31/266).
- P17) Do Huu, T., I. Prodan, F. Nicolau și F. Stoican. “Flatness in motion planning”. În: *Annual Reviews in Control*, 2022 (in preparation). ISSN: 1367-5788. Elsevier
IF: 4.987. Q1-IF (Automation & Control Systems - 12/63).

Rutinele Matlab/Python care implementează rezultatele teoretice descrise anterior sunt încărcate în proiectul GitLab https://gitlab.com/constrained_optimization/replan_tools.

3.2 Impact estimat al rezultatelor obținute:

Proiectul a fost orientat către obținerea de rezultate teoretice ce s-au concretizat în mod natural prin publicații cât și prin testări (simulare și experimental).

Din punct de vedere al potențialului (ca recunoaștere academică cât și aplicativ) consider două direcții ca având potențial:

- Abilitatea de a modela câmpul potențial generat de obstacole poliedrale și modelarea acestuia într-un formalism cu variabile mixte pentru implementare într-o strategie cu orizont recesiv (articolele de conferință ACC'22 - P10), CAO'22 - P11) și ECC'23 - P15)).

Combinăția dintre aceste elemente este nouă în domeniu și cred că este competitivă cu abordări echivalente (bazate pe metode MPC ce consideră constrângerile în mod explicit).

- Analiza comportamentului unor sisteme tipic folosite în robotică (drone) pentru diverse reprezentări plate (analiză a reprezentărilor echivalente - ICSTCC'21 P9), sinteză legi de urmărire - CAO'22 P12), o sinteză de ansamblu a domeniului, în pregătire - P17)).

Folosirea platitudinii permite ”ocolirea” dificultăților ce survin datorită neliniarităților asociate sistemelor robotice uzuale.

Referințe

- [1] Vinnicombe, G. “Frequency domain uncertainty and the graph topology”. În: *IEEE Trans. Automat. Contr.*, pag. 1371–1383, **1993**.
- [2] Nicolau, F. și W. Respondek. “Normal forms for multi-input flat systems of minimal differential weight”. În: *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, pag. 3139–3162, **2019**. Wiley Online Library.
- [3] Quoc Huy Tran, N. “Motion planning for multi-agent dynamical systems in a variable environment”. **2019**.
- [4] Lyche, T., C. Manni și H. Speleers. “Foundations of spline theory: B-splines, spline approximation, and hierarchical refinement”, în: *Splines and PDEs: From Approximation Theory to Numerical Linear Algebra*, pag. 1–76, **2018**. Springer.
- [5] Optimization, I. G. și alții. “Gurobi optimizer reference manual, 2018”. În: URL <http://www.gurobi.com>, **2018**.
- [6] **Stoican, F.**, I. Prodan și D. Popescu. “Flat trajectory generation for way-points relaxations and obstacle avoidance”, pag. 695–700. În: **2015**.
DOI: [10.1109/MED.2015.7158827](https://doi.org/10.1109/MED.2015.7158827).
- [7] Tudor, F. S. și C. Oară. “ \mathcal{H}_2 optimal control for generalized discrete-time systems”. În: *Automatica*, pag. 1526–1530, **2014**.
- [8] Herceg, M., M. Kvasnica, C. Jones și M. Morari. “Multi-Parametric Toolbox 3.0”, pag. 502–510. În: *Proc. of the European Control Conference*. **2013**. Zürich, Switzerland.
- [9] Piegl, L. și W. Tiller. *The nurbs book*, **2012**. Springer Science & Business Media.
- [10] Vielma, J. P., S. Ahmed și G. Nemhauser. “Mixed-integer models for nonseparable piecewise-linear optimization: Unifying framework and extensions”. În: *Operations research*, pag. 303–315, **2010**. INFORMS.
- [11] Levine, J. *Analysis and control of nonlinear systems: a flatness-based approach*, **2009**. Springer Science & Business Media.
- [12] Bordons, C. și E. Camacho. *[titlecase]title. [titlecase]subtitle*. 2004.
- [13] Boyd, S. și L. Vandenberghe. *Convex optimization*, **2004**. Cambridge university press.
- [14] Takaba, K. și T. Katayama. “ \mathcal{H}_2 Output Feedback Control for Descriptor Systems”. În: *Automatica*, pag. 841–850, **1998**.
- [15] Fliess, M., J. Lévine, P. Martin și P. Rouchon. “Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples”. În: *International journal of control*, pag. 1327–1361, **1995**. Taylor & Francis.
- [16] Ionescu, V. și M. Weiss. “The l^2 -control problem for time-varying discrete systems”. În: *Systems & Control Letters*, pag. 371–381, **1992**.
- [17] Slotine, J.-J. E., W. Li și alții. *Applied nonlinear control*, **1991**. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ.

Director Proiect,
Stoican Florin

